Mathematics

D-19

OCT 19 1938

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 179

Heft 3

Ausgegeben am 5. September 1938

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1938

Band 179. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Weil, A., Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen	129
Lamla, Ernst, Über eine Verallgemeinerung der Hillschen Determinante . . .	134
Moriya, Mikao, Abelsche Erweiterungen über algebraischen Funktionenkörpern einer Unbestimmten mit absolut-algebraischem Konstantenkörper	143
Steck, Max, Zur Theorie der reellen Inzidenzabbildungen. II	148

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen.

Von *A. Weil* in Straßburg.

(Aus einem Brief an H. Hasse.)

... Bei Gelegenheit eines Vortrages im Juliaschen Seminar habe ich neuerdings eine Methode zur Begründung des Riemann-Rochschen Satzes ausgearbeitet, die sich eng an meinen Beweis des verallgemeinerten Riemann-Rochschen Satzes [1]) anschließt. Dabei wird der Cauchysche Integralsatz geradezu als Definition des Differentials gebraucht, was mit der auch in der modernen Topologie bekannten Dualität zwischen Funktionen und Differentialformen recht wohl im Einklang steht. Sachlich sind natürlich die so definierten Differentiale nichts anderes als die von Ihnen eingeführten [2]), wenigstens wenn der Funktionenkörper nicht ein solcher ist, wo die letzteren sämtlich verschwinden. Zu einer eingehenden Untersuchung des Zusammenhanges mit den F. K. Schmidtschen Differentiationen [3]), sowie mit den Ergebnissen Teichmüllers [4]) bin ich noch nicht gekommen. Meine Methode sei im folgenden kurz mitgeteilt.

1. Aus der schönen F. K. Schmidtschen Arbeit [5]) entnehme ich die Nr. **1—2** des § 3, sowie die Tatsache, daß zu jedem Element z aus dem Funktionenkörper K ein Divisor (z) gehört. Ich sage, z sei Multiplum eines Divisors $\mathfrak{a}$, wenn der Divisor (z) Multiplum von $\mathfrak{a}$ ist; wie üblich werden die Begriffe Multiplum von $\mathfrak{a}$, teilbar durch $\mathfrak{a}$ und $\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ als gleichwertige Ausdrucksweisen gebraucht. Der Grad eines Divisors $\mathfrak{a}$ werde durch $n(\mathfrak{a})$ bezeichnet. Wenn $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor ist, ist $n(\mathfrak{p})$ der Grad des zugehörigen Restklassenkörpers, der also in bezug auf den Konstantenkörper k eine Minimalbasis mit $n(\mathfrak{p})$ Elementen besitzt: $z_1, z_2, \ldots, z_{n(\mathfrak{p})}$ seien in K gelegene Vertreter dieser $n(\mathfrak{p})$ Elemente, t sei eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Ortsuniformisierende, d. h. ein Element aus K, dessen Divisor den Primdivisor $\mathfrak{p}$ genau zur ersten Potenz enthält; dann ist eindeutig jedem Element z aus K eine Entwicklung

$$z = \sum_{i=1}^{n(\mathfrak{p})} \sum_{\nu} c_{i\nu} z_i t^{\nu}$$

mit in k gelegenen Koeffizienten $c_{i\nu}$ zugeordnet; sie heiße (bei fest gewählten z_i, t) die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Entwicklung von z.

---

[1]) A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, Journal de Liouville (9) **17** (1938), p. 47.

[2]) H. Hasse, Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper, Crelles Journal **172** (1935), S. 55.

[3]) H. Hasse und F. K. Schmidt, Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten usw., Crelles Journ. **177** (1937), S. 215 (insbesondere Zusatz von F. K. Schmidt, S. 223).

[4]) O. Teichmüller, Differentialrechnung bei Charakteristik p, Crelles Journ. **175** (1936), S. 89.

[5]) F. K. Schmidt, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. I., Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 415.

Weiter sei x ein über k transzendentes Element von K; der Nennerdivisor $\mathfrak{d}$ von x sei durch die Primdivisoren $\mathfrak{p}_\varrho$ und durch keinen anderen teilbar; $\mathfrak{o}$ sei die Menge derjenigen Elemente aus K, deren Nennerdivisoren die $\mathfrak{p}_\varrho$ nicht enthalten: $\mathfrak{o}$ ist Integritätsbereich, und $x^{-1}\mathfrak{o}$ ist Hauptideal in $\mathfrak{o}$. Aus der Betrachtung der zu den $\mathfrak{p}_\varrho$ gehörigen Entwicklungen der Elemente aus $\mathfrak{o}$ folgert man leicht (wenn man noch den Unabhängigkeitssatz berücksichtigt, vgl. a. a. O.[5]), daß $\mathfrak{o}/x^{-1}\mathfrak{o}$ endlicher k-Modul vom Range $n(\mathfrak{d})$ ist; also gibt es in $\mathfrak{o}$ genau $n(\mathfrak{d})$ modulo $x^{-1}\mathfrak{o}$ linear-unabhängige Elemente w_i. Die w_i sind dann in bezug auf $k(x)$ linear-unabhängig; eine lineare Relation zwischen den w_i mit Koeffizienten aus $k(x)$ könnte nämlich in der Form

$$\sum_i P_i(x^{-1}) \cdot w_i = 0$$

geschrieben werden, wo die P_i Polynome in x^{-1} mit nicht sämtlich verschwindenden konstanten Gliedern a_i bedeuten; dann gehörte aber $\sum_i a_i w_i$ dem Ideal $x^{-1}\mathfrak{o}$ an, was der Definition der w_i widerspricht. Also ist $(K : k(x)) \geqq n(\mathfrak{d})$.

2. Jedem Divisor $\mathfrak{a}$ werde die lineare Schar $L(\mathfrak{a})$ der durch $\mathfrak{a}^{-1}$ teilbaren Elemente aus K zugeordnet; ihre Dimension sei mit $l(\mathfrak{a})$ bezeichnet (auch wenn sie unendlich sein sollte, da wir ihre Endlichkeit nicht als bekannt voraussetzen).

Wenn $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist, so ist $L(\mathfrak{b})$ in $L(\mathfrak{a})$ enthalten. Betrachten wir die Entwicklungen eines z aus $L(\mathfrak{a})$, die zu den in $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ (mit nichtverschwindendem Exponenten) vorkommenden Primdivisoren gehören; damit z durch $\mathfrak{b}^{-1}$ teilbar sei, ist das Verschwinden von genau $n(\mathfrak{a}) - n(\mathfrak{b})$ Koeffizienten dieser Entwicklungen notwendig und hinreichend. $L(\mathfrak{b})$ ist also ein durch $n(\mathfrak{a}) - n(\mathfrak{b})$ lineare Gleichungen definierter Untermodul von $L(\mathfrak{a})$, woraus für jeden durch $\mathfrak{b}$ teilbaren Divisor $\mathfrak{a}$ die Ungleichung

$$n(\mathfrak{a}) - l(\mathfrak{a}) \geqq n(\mathfrak{b}) - l(\mathfrak{b})$$

folgt. Da $n(1) = 0$, $l(1) = 1$ ist, so ist insbesondere, wenn $\mathfrak{a}$ ganz ist, $l(\mathfrak{a}) \leqq n(\mathfrak{a}) + 1$.

Ferner sei wieder $\mathfrak{d}$ der Nennerdivisor von x, und $n = (K : k(x))$ sei der (endliche) Grad von K über $k(x)$. Der Körper K besitzt in bezug auf $k(x)$ eine Basis aus n Elementen v_i, die wir als in bezug auf $k[x]$ ganz voraussetzen dürfen. m_0 sei eine ganze Zahl derart, daß sämtliche v_i durch $\mathfrak{d}^{-m_0-1}$ teilbar seien; dann sind für $m > m_0$ die $x^\mu v_i$ $(0 \leqq \mu < m - m_0;\ 1 \leqq i \leqq n)$ in bezug auf k linear-unabhängige Elemente aus $L(\mathfrak{d}^m)$; also ist

$$n(m - m_0) \leqq l(\mathfrak{d}^m) \leqq m \cdot n(\mathfrak{d}) + 1.$$

Daraus folgt (für großes m) $n \leqq n(\mathfrak{d})$, also $n = n(\mathfrak{d})$ wegen der früher bewiesenen Ungleichung $n \geqq n(\mathfrak{d})$; wenn man x^{-1} statt x betrachtet, sieht man ein, daß der Zählerdivisor von x ebenfalls den Grad n hat, woraus folgt, daß für äquivalente Divisoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}' = x\mathfrak{a}$ der Grad derselbe ist; andererseits ist dann $l(\mathfrak{a}) = l(\mathfrak{a}')$, da $L(\mathfrak{a}')$ aus $L(\mathfrak{a})$ durch Multiplikation mit x^{-1} hervorgeht. Da nun $n(\mathfrak{d}^m) - l(\mathfrak{d}^m) \leqq n m_0$ ist, so besteht die Ungleichung $n(\mathfrak{a}) - l(\mathfrak{a}) \leqq n m_0$ für jeden mit einer Potenz $\mathfrak{d}^m$ äquivalenten Divisor, also (wegen des oben Bewiesenen) auch für jeden Divisor, der einen solchen teilt. Das ist aber für jeden Divisor aus K der Fall; denn es genügt, dies für einen nicht in $\mathfrak{d}$ enthaltenen Primdivisor $\mathfrak{p}$ zu beweisen. Da aber der zugehörige Restklassenkörper in bezug auf k algebraisch ist, so gibt es ein durch $\mathfrak{p}$ teilbares $P(x)$ aus $k[x]$, dessen Zählerdivisor also einerseits durch $\mathfrak{p}$ teilbar, andererseits mit einer Potenz $\mathfrak{d}^m$ äquivalent ist.

Die Zahl $n(\mathfrak{a}) - l(\mathfrak{a}) + 1$ hat also, wenn $\mathfrak{a}$ sämtliche ganze Divisoren durchläuft, eine endliche obere Schranke $g \geqq 0$; mit $\mathfrak{g}$ sei im folgenden ein fest gewählter ganzer Divisor bezeichnet, derart, daß $n(\mathfrak{g}) - l(\mathfrak{g}) + 1 = g$ sei. Dann ist, wenn $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{g}$ teil-

bar ist:

$$l(\mathfrak{a}) = n(\mathfrak{a}) + 1 - g.$$

3. Es sei $\mathfrak{b}$ beliebig und $\mathfrak{a}$ ein gemeinsames Multiplum von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{g}$. Aus **1** folgt die Ungleichung $l(\mathfrak{b}) \geqq n(\mathfrak{b}) + 1 - g$. Genauer ist, wie oben bemerkt wurde, $L(\mathfrak{b})$ ein durch $n(\mathfrak{a}) - n(\mathfrak{b})$ lineare Gleichungen definierter Untermodul von $L(\mathfrak{a})$, und es ist, wenn zwischen diesen Gleichungen genau $r(\mathfrak{b})$ Relationen identisch bestehen:

$$l(\mathfrak{b}) = n(\mathfrak{b}) + 1 - g + r(\mathfrak{b}).$$

Jede solche Relation ist aber nichts anderes als eine lineare Relation $R(z) = 0$ zwischen endlich vielen Entwicklungskoeffizienten eines z aus $L(\mathfrak{a})$, die für jedes solche z erfüllt ist.

$\mathfrak{a}'$ sei ein Multiplum von $\mathfrak{a}$; $R'(z)$ sei ein linearer Ausdruck in endlich vielen Entwicklungskoeffizienten eines z aus $L(\mathfrak{a}')$, der für jedes solche z verschwindet. $L(\mathfrak{a})$ ist ein durch das Verschwinden gewisser Entwicklungskoeffizienten definierter Untermodul von $L(\mathfrak{a}')$; durch das Fortfallen der entsprechenden Glieder wird also aus $R'(z)$ ein linearer Ausdruck $R(z)$ in den Entwicklungskoeffizienten eines z aus $L(\mathfrak{a})$, der für jedes z aus $L(\mathfrak{a})$ verschwindet. Wir sagen dann, $R'(z)$ sei eine Fortsetzung von $R(z)$. Dabei kann $R(z)$ nur dann identisch verschwinden, wenn das schon für $R'(z)$ der Fall ist; denn sonst wäre $R'(z) = 0$ eine Relation zwischen den $n(\mathfrak{a}') - n(\mathfrak{a})$ Gleichungen, die $L(\mathfrak{a})$ innerhalb $L(\mathfrak{a}')$ definieren, und es wäre $l(\mathfrak{a}) - n(\mathfrak{a}) > l(\mathfrak{a}') - n(\mathfrak{a}')$, entgegen der Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{g}$ teilbar ist. Jedes $R(z)$ besitzt also höchstens eine Fortsetzung.

Andererseits kann man zu einem gegebenen $R(z)$ einen Divisor $\mathfrak{b}$ so wählen, daß $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar ist, und daß $R(z)$ nur solche Entwicklungskoeffizienten eines z aus $L(\mathfrak{a})$ enthält, deren Verschwinden ausdrückt, daß z zu $L(\mathfrak{b})$ gehört. $R(z) = 0$ ist also eine der $r(\mathfrak{b})$ Relationen zwischen den Gleichungen, die $L(\mathfrak{b})$ innerhalb $L(\mathfrak{a})$ definieren. Es ist aber $r(\mathfrak{b}) = l(\mathfrak{b}) - n(\mathfrak{b}) + g - 1$, und diese Anzahl ändert sich nicht, wenn man $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}'$ ersetzt. Da jedes $R(z)$ höchstens eine Fortsetzung besitzt, muß also auch jedes $R(z)$ eine Fortsetzung besitzen. Mithin entsprechen sich die $R(z)$ und ihre Fortsetzungen $R'(z)$ eineindeutig, und wir dürfen die $R'(z)$ mit den $R(z)$ geradezu identifizieren.

Betrachten wir insbesondere die linearen Ausdrücke in endlich vielen Entwicklungskoeffizienten eines z aus $L(\mathfrak{g})$, die für jedes z aus $L(\mathfrak{g})$ verschwinden. Jedem solchen Ausdruck ordnen wir eineindeutig ein neues Ding ω zu, das ein Differential genannt werde; den Ausdruck selbst, sowie jede seiner Fortsetzungen, schreiben wir dann als $\phi z\omega$. Da man zu jedem z ein Multiplum $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$ wählen kann, derart, daß z in $L(\mathfrak{a})$ enthalten ist, so hat (unabhängig von dieser Wahl, wie man sofort einsieht) für jedes z aus K der Ausdruck $\phi z\omega$ einen Sinn.

Für jedes z aus K und jedes Differential ω besteht also die Gleichung $\phi z\omega = 0$. Insbesondere ist, wenn x und ω fest gewählt sind, $\phi z \cdot x\omega = 0$ für jedes z aus K, also insbesondere für jedes z aus $L(\mathfrak{g})$ erfüllt; das heißt, daß der Ausdruck $\phi z \cdot x\omega$ ein Differential definiert, das mit $x\omega$ bezeichnet werde. Mit anderen Worten: Es läßt der Modul der Differentiale die Elemente des Körpers K als Operatoren zu.

4. Wir sagen, das Differential ω sei Multiplum von $\mathfrak{b}$, wenn für jedes z aus $L(\mathfrak{b})$ das Integral $\phi z\omega$ überhaupt keinen Entwicklungskoeffizienten von z mit einem nichtverschwindenden Koeffizienten enthält. Offenbar kann nach unseren Definitionen kein nichtverschwindendes Differential Multiplum von $\mathfrak{g}$ sein; also ist $r(\mathfrak{b})$ genau die Anzahl der Differentiale, die durch $\mathfrak{b}$ teilbar sind. Wenn ω durch $\mathfrak{b}$ und x durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, so ist $x\omega$ durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ teilbar.

Wenn ω Multiplum des Divisors 1 ist, so heiße ω ganz. Da $n(1) = 0$, $l(1) = 1$ ist, ist $r(1) = g$; es gibt also genau g ganze Differentiale. Es sei ω durch $\mathfrak{b}$ teilbar; dann

wird $x\omega$ ganz, wenn x in $L(\mathfrak{b})$ liegt, also muß $l(\mathfrak{b}) \leqq g$ und folglich $n(\mathfrak{b}) \leqq 2g-1$ sein. Es sei $\mathfrak{d}_\omega$ ein Teiler vom größten Grade des Differentials ω und $n(\omega)$ sein Grad. Es ist $n(\omega) \leqq 2g-1$, und jeder Teiler $\mathfrak{b}$ von ω ist Teiler von $\mathfrak{d}_\omega$.

Wenn $\mathfrak{b}$ ganz und $\neq 1$ ist, ist $l(\mathfrak{b}^{-1}) = 0$, also $r(\mathfrak{b}^{-1}) = n(\mathfrak{b}) + g - 1$. Nehmen wir an, es gäbe zwei bezüglich K linear-unabhängige Differentiale ω, η; dann ist stets $x\omega \neq y\eta$; andererseits sind $x\omega$ und $y\eta$ durch $\mathfrak{b}^{-1}$ teilbar, wenn x zu $L(\mathfrak{b}\mathfrak{d}_\omega)$ bzw. y zu $L(\mathfrak{b}\mathfrak{d}_\eta)$ gehört. Mithin ist

$$l(\mathfrak{b}\mathfrak{d}_\omega) + l(\mathfrak{b}\mathfrak{d}_\eta) \leqq n(\mathfrak{b}) + g - 1,$$

also

$$2n(\mathfrak{b}) + n(\omega) + n(\eta) + 2 - 2g \leqq n(\mathfrak{b}) + g - 1.$$

Für großes $n(\mathfrak{b})$ ist das gewiß unmöglich. Also sind ω, η bezüglich K nicht unabhängig, d. h. wenn ω ein festes Differential ist, so ist jedes Differential in der Form $x\omega$ darstellbar.

$\mathfrak{b}$ sei jetzt ein ganzes Multiplum von $\mathfrak{g}\mathfrak{d}_\omega^{-1}$ und $\neq 1$; dann ist einerseits

$$r(\mathfrak{b}^{-1}) = n(\mathfrak{b}) + g - 1.$$

Andererseits ist $r(\mathfrak{b}^{-1})$ die Anzahl der Differentiale $x\omega$, die durch $\mathfrak{b}^{-1}$ teilbar sind, also gleich $l(\mathfrak{b}\mathfrak{d}_\omega)$ oder (da $\mathfrak{b}\mathfrak{d}_\omega$ durch $\mathfrak{g}$ teilbar ist) gleich $n(\mathfrak{b}) + n(\omega) + 1 - g$. Mithin ist $n(\omega) = 2g-2$. Und für beliebiges $\mathfrak{b}$ ist allgemein $r(\mathfrak{b}) = l(\mathfrak{d}_\omega \mathfrak{b}^{-1})$. Damit ist alles bewiesen.

Der Anschluß an den gewöhnlichen Differentialbegriff im separablen Falle ergibt sich aus der von Ihnen [2]) bewiesenen Tatsache, daß $\oint z\,dx = 0$ ist, daß also dx als ein Differential im obigen Sinne betrachtet werden kann.

5. Zum Schluß möchte ich noch die Analogie mit den von Chevalley in die Zahlentheorie eingeführten Idealelementen [6]) andeuten. Es sei $K_\mathfrak{p}$ der zum Primdivisor $\mathfrak{p}$ gehörige Lokalkörper, der aus K durch Abschließung in bezug auf die entsprechende Bewertung hervorgeht oder auch als Körper der formalen Entwicklungen $\sum_{i,\nu} c_{i\nu} z_i t^\nu$ definiert werden kann (er erscheint so als hyperkomplexes System über dem Körper der Potenzreihen $\sum_\nu c_\nu t^\nu$, da die z_i Gleichungen von der Form $z_i z_j = \sum_{k,\nu} c_{ijk\nu} z_k t^\nu$ genügen); die Einbettung von K in $K_\mathfrak{p}$ ist ein Isomorphismus $I_\mathfrak{p}$. Nun betrachten wir im direkten Produkt aller $K_\mathfrak{p}$ den Ring $\mathfrak{R}$ derjenigen Elemente, deren Komponenten bis auf endlich viele ganz sind; durch die $I_\mathfrak{p}$ wird K in $\mathfrak{R}$ isomorph eingebettet. Ein Element α von $\mathfrak{R}$ sei *Fasteinheit* genannt, wenn es in $\mathfrak{R}$ eine Reziproke α^{-1} besitzt; dazu ist notwendig und hinreichend, daß keine Komponente von α verschwinde, und daß die Komponenten von α, bis auf endlich viele, Einheiten der betreffenden $K_\mathfrak{p}$ seien. Jedes Element von K, mit Ausnahme von 0, ist Fasteinheit; die multiplikative Gruppe der Fasteinheiten ist nichts anderes als die Chevalleysche Gruppe der Idealelemente.

$\mathfrak{O}$ sei der Ring aller Elemente in $\mathfrak{R}$, deren sämtliche Komponenten ganz sind; dann gibt es eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Divisoren $\mathfrak{a}$ in K und denjenigen Hauptidealen $(\alpha) = \alpha\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{R}$, die von einer Fasteinheit α erzeugt werden; $L(\mathfrak{a})$ ist dann nichts anderes als der Durchschnitt von K mit dem Ideal $\alpha^{-1}\mathfrak{O}$.

Jetzt werde $\mathfrak{R}$ dadurch topologisiert, daß man jedem Element ζ_0 aus $\mathfrak{R}$ und jeder Fasteinheit α eine Umgebung von ζ_0 zuordnet, nämlich die Menge aller solcher ζ, für die $\zeta - \zeta_0$ in $\alpha\mathfrak{O}$ liegt. R ist dann topologischer Ring; jedes abgeschlossene $\mathfrak{O}$-Ideal in R

---

[6]) C. Chevalley, Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies, Journal de Liouville (9) **15** (1936), p. 359 (vgl. auch A. Weil, Remarques sur des résultats récents de C. Chevalley, C. R. Paris **203** (1936), p. 1208). Auf den Zusammenhang zwischen dieser Arbeit und meinen Ausführungen wurde ich durch Chevalley aufmerksam gemacht.

besteht aus allen Fastmultiplen eines gewissen Divisors in bezug auf eine gewisse Menge von Primdivisoren (wobei der F. K. Schmidtsche Begriff der Fastmultiplen, a. a. O. [5]), in naheliegender Weise für die Elemente von $\mathfrak{R}$ erklärt wird), und umgekehrt ist jede solche Menge abgeschlossenes $\mathfrak{O}$-Ideal in $\mathfrak{R}$.

Nun läßt sich, genau so wie oben in Nr. **3** der Ausdruck $\phi z\omega$, hier der Ausdruck $\phi\zeta\omega$ für jedes ζ aus $\mathfrak{R}$ definieren; er wird dabei eine stetige lineare Funktion in $\mathfrak{R}$, wenn man den Körper k (in welchem diese Funktion ihre Werte annimmt) mit der diskreten (Hausdorffschen) Topologie versieht. Umgekehrt ist jede in $\mathfrak{R}$ stetige lineare Funktion, die in k ihre Werte annimmt und auf dem in $\mathfrak{R}$ gelegenen isomorphen Bild von K verschwindet, von der Form $\phi\zeta\omega$. Die Relationen $\phi z\omega = 0$ sind also nichts anderes, als die Gleichungen, die die abgeschlossene Hülle des Bildes von K innerhalb $\mathfrak{R}$ definieren.

Die obigen Ausführungen sind übrigens die beste Grundlage für die Klassenkörpertheorie im Gebiete der algebraischen Funktionen. Eine solche Theorie besteht nämlich in viel genauerem Sinne, als bisher bemerkt wurde, wie ich im klassischen Falle (wo der Konstantenkörper aus den komplexen Zahlen besteht) bestätigt habe; doch sei diese Frage auf eine andere Gelegenheit verschoben.

Straßburg, den 7. Februar 1938.

Eingegangen 9. Februar 1938.

Über eine Verallgemeinerung der Hillschen Determinante.

Von *Ernst Lamla* in Berlin.

---

1. *Das System linearer Gleichungen für die Elektronenbeugung.* Das Problem der Elektronenbeugung in einem Kristall läßt sich in der Weise behandeln, daß man den aus dem Vakuum ankommenden Elektronenstrahl als eine ebene Materiewelle ansieht, für die die Schrödinger-Gleichung mit dem Potential Null gilt. Für das Innere des Kristalls wird das Potential als eine räumlich periodische Funktion angenommen, die die Perioden des Kristallgitters besitzt, und daher durch eine dreifache Fourier-Reihe ausgedrückt. Diesen Ansatz hat zuerst H. Bethe durchgeführt [1]). Die Wellenfunktion ψ für das Kristallinnere wird ebenfalls als dreifache Fourier-Reihe angesetzt, die die Perioden des Kristallgitters besitzt, und deren einzelne Glieder ebene Wellen darstellen. Es handelt sich vor allem zunächst um die Ermittlung der im Kristall möglichen Wellenfelder. Man kann nun etwa (und das empfiehlt sich z. B. bei Annahme einer ebenen Grenze zwischen Vakuum und Kristall im Hinblick auf die Grenzbedingungen) die tangentiellen Komponenten des Ausbreitungsvektors einer beliebigen Welle des Wellenfeldes vorgeben. Dann kann seine Normalkomponente nicht willkürlich gewählt werden, sondern sie muß so beschaffen sein, daß das folgende Gleichungssystem lösbar wird, das sich aus der Schrödinger-Gleichung für die unbekannten Fourier-Koeffizienten ψ_g ergibt:

$$(1) \qquad \frac{(x + t_g + g_3)^2 - c_g^2}{(t_g + g_3)^2 - c_g^2}\,\psi_g - \sum_{h \neq g} \frac{a_{g-h}\zeta}{(t_g + g_3)^2 - c_g^2}\,\psi_h = 0\,.$$

In diesem System von unendlich vielen linearen homogenen Gleichungen bedeutet x (bis auf einen konstanten Faktor) die unbekannte Normalkomponente des erwähnten Ausbreitungsvektors. Die Buchstaben g und h vertreten stets ein Tripel von drei ganzen Zahlen g_1, g_2, g_3 bzw. h_1, h_2, h_3. Die ψ_g sind die unbekannten Fourier-Koeffizienten der Wellenfunktion (Wellenamplituden). Die $a_g\,\zeta$ sind die (als bekannt anzusehenden) Fourier-Koeffizienten des inneren Potentials. ζ ist in allen physikalisch wichtigen Fällen klein gegen 1. a_{-g} ist konjugiert komplex zu a_g. Die Größen a_g genügen der Bedingung:

(1 a) $\qquad \sum_g a_g \zeta$ ist absolut konvergent.

t_g und c_g sind Größen, die durch die Kristallstruktur, die Wellenlänge und die vorgegebenen Tangentialkomponenten des Ausbreitungsvektors bestimmt sind; sie sind als bekannt zu betrachten und hängen nur von den ganzen Zahlen g_1 und g_2, nicht aber von g_3 ab [2]). Insbesondere ist t_g eine homogene lineare Funktion von g_1 und g_2. t_g und c_g sind im allgemeinen keine ganzen Zahlen.

---

[1]) H. Bethe, Theorie der Beugung von Elektronen an Kristallen, Ann. d. Phys. (4) **87** (1928), S. 55—129.

[2]) Es ist also a_g eine Abkürzung für $a_{g_1 g_2 g_3}$; dagegen $c_g = c_{g_1 g_2}$.

2. *Unendliche Determinante mit einfachem Ursprung (Hillsche Determinante).* Die erste wesentliche Frage ist die, für welche Werte x das Gleichungssystem (1) lösbar ist. Bedingung für die Lösbarkeit ist das Verschwinden der zugehörigen Determinante. Für viele physikalische Anwendungen genügt die Annahme [1]), daß die Amplitudenwerte ψ_g sämtlich sehr klein und zu vernachlässigen sind bis auf zwei. Dadurch reduziert sich (1) auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Für x ergibt sich eine biquadratische Gleichung.

Ein anderer, von Morse untersuchter Fall ist der, daß nur solche ψ_g in Betracht kommen, die sämtlich zu demselben Wertepaar (g_1, g_2) gehören [3]). Es sei also $g_1 = g_2 = 0$ (also auch $t_g = 0$), während $g_3 = n$ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen kann. (1) lautet dann:

$$(2) \qquad \frac{(x+n)^2 - c_0^2}{n^2 - c_0^2}\,\psi_n - \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq n}}^{+\infty} \frac{a_{n-m}\zeta}{n^2 - c_0^2}\,\psi_m = 0.$$

Man erkennt leicht, daß in (1) und ebenso in (2) der Nenner zugefügt worden ist, um die Konvergenz der jetzt entstehenden unendlichen Determinante zu sichern. Bedingung für die Lösbarkeit des Systems (2) ist

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \dfrac{(x-1)^2 - c_0^2}{1^2 - c_0^2} & -\dfrac{a_{-1}\zeta}{1^2 - c_0^2} & -\dfrac{a_{-2}\zeta}{1^2 - c_0^2} \quad \cdots \\ \cdots & -\dfrac{a_1\zeta}{-c_0^2} & \dfrac{x^2 - c_0^2}{-c_0^2} & -\dfrac{a_{-1}\zeta}{-c_0^2} \quad \cdots \\ \cdots & -\dfrac{a_2\zeta}{1^2 - c_0^2} & -\dfrac{a_1\zeta}{1^2 - c_0^2} & \dfrac{(x+1)^2 - c_0^2}{1^2 - c_0^2} \quad \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist eine Hillsche Determinante [4]). Man kann (3) bekanntlich auf eine lineare Gleichung für $\sin^2(\pi x)$ zurückführen und damit auflösen [5]). Insbesondere ergibt sich, daß (3) nur zwei Lösungen x besitzt, die sich nicht nur um ganze Zahlen unterscheiden (diese beiden unterscheiden sich durch das Vorzeichen), und daß zu diesen Lösungen $\pm x$ die weiteren Lösungen $\pm x + n$ hinzukommen, wo n eine beliebige ganze Zahl ist.

3. *Unendliche Determinante mit vierfachem Ursprung.* Bei Betrachtungen über die Kikuchi-Enveloppen wird es nötig, in (1) alle diejenigen ψ_g zu berücksichtigen, die zu zwei verschiedenen Wertepaaren (g_1, g_2) gehören [6]). Das erste Wertepaar sei (0, 0), das zweite heiße (g_1, g_2). $g_3 = n$ durchläuft wieder alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$. (1) wird dann, wenn der Index g im folgenden nicht die drei Indizes g_1, g_2, g_3 vertritt, sondern nur noch g_1, g_2 [7]):

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{(x+n)^2 - c_0^2}{n^2 - c_0^2}\psi_n - \displaystyle\sum_{q \neq n} \frac{a_{n-q}\zeta}{n^2 - c_0^2}\psi_q - \sum_q \frac{a_{-g+n-q}\zeta}{n^2 - c_0^2}\psi_{g+q} = 0, \\ -\displaystyle\sum_q \frac{a_{g+n-q}\zeta}{(t_g+n)^2 - c_g^2}\psi_q + \frac{(x+t_g+n)^2 - c_g^2}{(t_g+n)^2 - c_g^2}\psi_{g+n} - \sum_{q \neq n} \frac{a_{n-q}\zeta}{(t_g+n)^2 - c_g^2}\psi_{g+q} = 0. \end{cases}$$

Zu summieren ist jedesmal über q von $-\infty$ bis $+\infty$.

---

[3]) Ph. M. Morse, The quantum mechanics of electrons in crystals, Phys. Rev. (2) **35** (1930), S. 1310—1324.

[4]) G. W. Hill, On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, Acta Math. **8** (1886), S. 1—36.

[5]) Vgl. z. B. E. T. Whittaker, C. N. Watson, A course of modern analysis, 4. Aufl. (Cambridge 1935), S. 415.

[6]) E. Lamla, Zur Theorie der Elektronenbeugung bei Berücksichtigung von mehr als zwei Strahlen und zur Erklärung der Kikuchi-Enveloppen, Ann. d. Phys. (5) **32** (1938), S. 178—189, S. 225—241.

[7]) Im folgenden bedeutet also z. B. $a_{g+n} = a_{g_1 g_2 n}$; $a_{n+q} = a_{0,0,n+q}$.

Die zu diesem Gleichungssystem gehörige unendliche Determinante kann als eine Verallgemeinerung der Hillschen Determinante (3) aufgefaßt werden. Sie läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, in ähnlicher Weise umformen wie diese. Daraus ergibt sich dann eine Antwort auf die für die physikalischen Anwendungen wichtige Frage, wieviel unabhängige (d. h. nicht nur um ganze Zahlen verschiedene) Werte x es gibt, für die die Determinante verschwindet, das System (4) also lösbar ist. Es wird

$$(5)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{(x-1)^2-c_0^2}{1^2-c_0^2} & -\frac{a_{-1}\zeta}{1^2-c_0^2} & -\frac{a_{-2}\zeta}{1^2-c_0^2} & \cdots -\frac{a_{-g}\zeta}{1^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g-1}\zeta}{1^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g-2}\zeta}{1^2-c_0^2} \cdots \\ \cdots -\frac{a_1\zeta}{-c_0^2} & \frac{x^2-c_0^2}{-c_0^2} & -\frac{a_{-1}\zeta}{-c_0^2} & \cdots -\frac{a_{-g+1}\zeta}{-c_0^2} & -\frac{a_{-g}\zeta}{-c_0^2} & -\frac{a_{-g-1}\zeta}{-c_0^2} & \cdots \\ \cdots -\frac{a_2\zeta}{1^2-c_0^2} & -\frac{a_1\zeta}{1^2-c_0^2} & \frac{(x+1)^2-c_0^2}{1^2-c_0^2} & \cdots -\frac{a_{-g+2}\zeta}{1^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g+1}\zeta}{1^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g}\zeta}{1^2-c_0^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots -\frac{a_g\zeta}{(t_g-1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{g-1}\zeta}{(t_g-1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{g-2}\zeta}{(t_g-1)^2-c_g^2} \cdots & \frac{(x+t_g-1)^2-c_g^2}{(t_g-1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{-1}\zeta}{(t_g-1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{-2}\zeta}{(t_g-1)^2-c_g^2} & \cdots \\ \cdots -\frac{a_{g+1}\zeta}{t_g^2-c_g^2} & -\frac{a_g\zeta}{t_g^2-c_g^2} & -\frac{a_{g-1}\zeta}{t_g^2-c_g^2} \cdots & -\frac{a_1\zeta}{t_g^2-c_g^2} & \frac{(x+t_g)^2-c_g^2}{t_g^2-c_g^2} & -\frac{a_{-1}\zeta}{t_g^2-c_g^2} & \cdots \\ \cdots -\frac{a_{g+2}\zeta}{(t_g+1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{g+1}\zeta}{(t_g+1)^2-c_g^2} & -\frac{a_g\zeta}{(t_g+1)^2-c_g^2} \cdots & -\frac{a_2\zeta}{(t_g+1)^2-c_g^2} & -\frac{a_1\zeta}{(t_g+1)^2-c_g^2} & \frac{(x+t_g+1)^2-c_g^2}{(t_g+1)^2-c_g^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

(5) ist von etwas allgemeinerer Form als die Hillsche Determinante (3). Determinanten der Form (3) werden nach Cazzaniga [8]) allgemein folgendermaßen definiert. Es sei eine zweifach-unendliche Zahlenfolge $a_{\mu\nu}$ gegeben und in Form eines vierseitig unbegrenzten Schemas geordnet derart, daß der erste Index μ einer bestimmten Zeile, der zweite ν einer bestimmten Spalte entspricht. Wir bilden dann die Determinante vom Grade $k+l$

$$(6a)\qquad D_{kl} = \begin{vmatrix} a_{-k\,-k} & \cdots & a_{-k\,0} & \cdots & a_{-k\,l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{0\,-k} & \cdots & a_{00} & \cdots & a_{0l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l\,-k} & \cdots & a_{l0} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix}.$$

Nähert sich D_{kl} mit unendlich wachsendem k und l einem bestimmten Grenzwert D, so heißt die unendliche Determinante konvergent, und ihr Wert ist D. Die Determinante heißt unbedingt konvergent, wenn ihr Wert durch die Vertauschung von Zeilen oder von

[8]) T. Cazzaniga, Sui determinanti d'ordine infinito, Ann. di Mat. (2) **26** (1897), S. 143—218.

Spalten nicht geändert wird (bis auf einen Faktor ± 1). H. v. Koch [9]), der die Eigenschaften dieser Determinanten sehr genau untersucht hat, schränkt die Definition dahin ein, daß er $k = l$ setzt, also

$$D = \lim_{k \to \infty} D_{kk}. \tag{6b}$$

H. v. Koch bezeichnet das Element a_{00} als Ursprung der Determinante. Determinanten der Form (6) und (3) heißen vierseitig unendlich [10]).

Zur Definition der Determinanten vom Typus (5) gehen wir entsprechend von vier zweifach-unendlichen Zahlenfolgen $a_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}$ aus, deren jede in Form eines vierseitig unbegrenzten Schemas geordnet ist, derart, daß sich μ auf die Zeilen, ν auf die Spalten bezieht, und bilden die Determinante vom Grade $k + l + m + n$

$$D_{klmn} = \begin{vmatrix} a_{-k\,-k} \cdots a_{-k\,l} & b_{-k\,-m} \cdots b_{-k\,n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{l\,-k} \cdots a_{ll} & b_{l\,-m} \cdots b_{ln} \\ c_{-m\,-k} \cdots c_{-m\,l} & d_{-m\,-m} \cdots d_{-m\,n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ c_{n\,-k} \cdots c_{nl} & d_{n\,-m} \cdots d_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7a}$$

Strebt D_{klmn} mit unendlich wachsenden k, l, m, n einer bestimmten endlichen Größe D zu, so sagen wir, die unendliche Determinante sei konvergent und habe den Wert D. Sie ist unbedingt konvergent, wenn ihr Wert bei Vertauschung von Zeilen oder von Spalten ungeändert bleibt (bis auf einen Faktor ± 1). Für das Folgende kommen wir übrigens meist mit der der Gleichung (6b) entsprechenden Einschränkung $k = l = m = n$ aus:

$$D = \lim_{k \to \infty} D_k = \lim_{k \to \infty} D_{kkkk}. \tag{7b}$$

Gemäß der Ausdrucksweise von H. v. Koch können wir sagen, daß (7b) einen vierfachen Ursprung hat; die Ursprungselemente sind $a_{00}, b_{00}, c_{00}, d_{00}$.

Für Determinanten der Form (6) ist es eine *hinreichende* Bedingung für ihre unbedingte Konvergenz, daß erstens das Produkt der Elemente der Hauptdiagonale und zweitens die Summe aller nicht in der Hauptdiagonale stehenden Elemente absolut konvergieren [11]). (Determinanten, die diese Bedingung erfüllen, heißen nach v. Koch Normaldeterminanten.) Dieser Satz gilt nun auch für Determinanten der Form (7); der Beweis ist genau ebenso zu führen wie für die Form (6).

Für die Determinante (5), die die unmittelbare Verallgemeinerung der Hillschen Determinante (3) ist, ist die eben angegebene Bedingung nicht allgemein erfüllt, da das Produkt der Diagonalelemente nicht für alle Werte x unbedingt konvergiert. Wir hätten aber von vornherein eine sicher unbedingt konvergierende Determinante erhalten können, wenn wir den Gleichungen (1) und (4) statt $(t_g + g_3)^2 - c_g^2$ den Nenner $(x + t_g + g_3)^2 - c_g^2$ gegeben hätten. Machen wir dies, so lautet die Bedingung für die Lösbarkeit des Systems (4):

---

[9]) H. v. Koch, Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires, Acta Math. **15** (1891), S. 53—63.

H. v. Koch, Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires, Acta Math. **16** (1892/93), S. 217—295.

[10]) A. Pringsheim, Encykl. d. math. Wiss. I A **3** (1898), S. 143. Hier auch weitere Literatur.

[11]) Vgl. z. B. E. T. Whittaker, C. N. Watson, a. a. O., S. 36.

$$(8)\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \cdots & 1 & -\frac{a_{-1}\zeta}{(x-1)^2-c_0^2} & -\frac{a_{-2}\zeta}{(x-1)^2-c_0^2} & \cdots & -\frac{a_{-g}\zeta}{(x-1)^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g-1}\zeta}{(x-1)^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g-2}\zeta}{(x-1)^2-c_0^2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{a_1\zeta}{x^2-c_0^2} & 1 & -\frac{a_{-1}\zeta}{x^2-c_0^2} & \cdots & -\frac{a_{-g+1}\zeta}{x^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g}\zeta}{x^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g-1}\zeta}{x^2-c_0^2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{a_2\zeta}{(x+1)^2-c_0^2} & -\frac{a_1\zeta}{(x+1)^2-c_0^2} & 1 & \cdots & -\frac{a_{-g+2}\zeta}{(x+1)^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g+1}\zeta}{(x+1)^2-c_0^2} & -\frac{a_{-g}\zeta}{(x+1)^2-c_0^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -\frac{a_g\zeta}{(x+t_g-1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{g-1}\zeta}{(x+t_g-1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{g-2}\zeta}{(x+t_g-1)^2-c_g^2} & \cdots & 1 & -\frac{a_{-1}\zeta}{(x+t_g-1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{-2}\zeta}{(x+t_g-1)^2-c_g^2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{a_{g+1}\zeta}{(x+t_g)^2-c_g^2} & -\frac{a_g\zeta}{(x+t_g)^2-c_g^2} & -\frac{a_{g-1}\zeta}{(x+t_g)^2-c_g^2} & \cdots & -\frac{a_1\zeta}{(x+t_g)^2-c_g^2} & 1 & -\frac{a_{-1}\zeta}{(x+t_g)^2-c_g^2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{a_{g+2}\zeta}{(x+t_g+1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{g+1}\zeta}{(x+t_g+1)^2-c_g^2} & -\frac{a_g\zeta}{(x+t_g+1)^2-c_g^2} & \cdots & -\frac{a_2\zeta}{(x+t_g+1)^2-c_g^2} & -\frac{a_1\zeta}{(x+t_g+1)^2-c_g^2} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante ist, abgesehen von ihren ohne weiteres erkennbaren einfachen Polen, unbedingt konvergent; denn erstens ist das Produkt der Hauptdiagonalglieder 1, und zweitens ist die Summe der nicht in der Hauptdiagonale stehenden Glieder wegen (1a) und wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sicher absolut konvergent. Wir werden daher (8) weiter untersuchen. Es besteht übrigens eine sehr einfache Beziehung zwischen (5) und (8), die zwar im folgenden nicht gebraucht wird, die aber doch kurz hergeleitet werden soll. Gehen wir in bezug auf (5) und (8) auf die Gleichung (7b) zurück, so können wir schreiben

$$\Delta = \lim_{m\to\infty}\Delta_{(m)};\qquad \Delta_1 = \lim_{m\to\infty}\Delta_{1(m)}.$$

$$\Delta_{(m)} = \Delta_{1(m)}\prod_{n=-m}^{+m}\frac{(x+n+c_0)(x+n-c_0)}{(n+c_0)(n-c_0)}\cdot\frac{(x+t_g+n+c_g)(x+t_g+n-c_g)}{(t_g+n+c_g)(t_g+n-c_g)}.$$

Bei wachsendem m ist das vorstehende Produkt stets zugleich um die den Werten $+m$ und $-m$ entsprechenden Faktoren zu vergrößern. Wir fassen nun diese Faktoren zusammen:

$$\Delta_{(m)} = \Delta_{1(m)}\cdot\frac{(x+c_0)(x-c_0)}{c_0\cdot(-c_0)}\cdot\frac{(x+t_g+c_g)(x+t_g-c_g)}{(t_g+c_g)(t_g-c_g)}\cdot\prod_{n=1}^{m}\frac{[(x+c_0)^2-n^2][(x-c_0)^2-n^2][(x+t_g+c_g)^2-n^2][(x+t_g-c_g)^2-n^2]}{(c_0^2-n^2)(c_0^2-n^2)[(t_g+c_g)^2-n^2][(t_g-c_g)^2-n^2]}$$

$$= -\Delta_{1(m)}\cdot\frac{\pi(x+c_0)}{\pi c_0}\cdot\frac{\pi(x-c_0)}{\pi c_0}\cdot\frac{\pi(x+t_g+c_g)}{\pi(t_g+c_g)}\cdot\frac{\pi(x+t_g-c_g)}{\pi(t_g-c_g)}\cdot\prod_{n=1}^{m}\frac{\left[1-\left(\frac{x+c_0}{n}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{x-c_0}{n}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{x+t_g+c_g}{n}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{x+t_g-c_g}{n}\right)^2\right]}{\left[1-\left(\frac{c_0}{n}\right)^2\right]^2\left[1-\left(\frac{t_g+c_g}{n}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{t_g-c_g}{n}\right)^2\right]}.$$

Gehen wir nunmehr zur Grenze $m \to \infty$ über, so erhalten wir

$$(8a) \quad \Delta = -\Delta_1 \frac{\sin \pi(x+c_0) \cdot \sin \pi(x-c_0) \cdot \sin \pi(x+t_g+c_g) \cdot \sin \pi(x+t_g-c_g)}{\sin^2 \pi c_0 \cdot \sin \pi(t_g+c_g) \cdot \sin \pi(t_g-c_g)}.$$

Aus (8a) ergibt sich, daß diejenigen Werte x, für die $\Delta_1 = 0$ ist, auch Δ zum Verschwinden bringen. Zu einem Wurzelwert x von (8) gehören auch die Wurzelwerte $x+n$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Wir fragen nun, wieviel unabhängige (nicht nur um eine ganze Zahl verschiedene) Lösungen x die Gleichung (8) hat. Δ_1 ist nach (8) eine einfach-periodische Funktion von x mit der Periode 1. Sie hat einfache Pole an den Stellen

$$x = \pm c_0 + n \text{ und } x = -t_g \pm c_g + n,$$

wobei n jede ganze Zahl sein kann. Es wird vorausgesetzt, daß sich $\pm c_0$ und $-t_g \pm c_g$ nicht um eine *ganze* Zahl unterscheiden [12]). Die einfachste periodische Funktion von x mit der Periode 1 und mit einfachen Polen an den Stellen $x = c_0 + n$ ist die Funktion $\operatorname{cotg} \pi(x - c_0)$. Bestimmen wir nun vier Konstanten A, B, C, D so, daß die Funktion

$$(9) \quad f(x) = \Delta_1 - A \operatorname{cotg} \pi(x-c_0) - B \operatorname{cotg} \pi(x+c_0) - C \operatorname{cotg} \pi(x+t_g-c_g) - D \operatorname{cotg} \pi(x+t_g+c_g)$$

an den Stellen $\pm c_0$ und $-t_g \pm c_g$ keine Pole hat, so hat sie überhaupt keine Pole. $f(x)$ ist dann eine einfach periodische Funktion von x, die keine Pole hat, und die auch im Unendlichen beschränkt bleibt. Infolgedessen muß $f(x)$ nach dem Satz von Liouville eine Konstante sein. Zur Bestimmung ihres Wertes setzen wir $x = i\infty$. Es ist

$$\lim_{\beta \to \infty} \operatorname{cotg}(\alpha + i\beta) = \frac{-i \operatorname{cotg} \alpha - 1}{\operatorname{cotg} \alpha - i} = -i$$

und daher

$$f(+i\infty) = 1 + (A+B+C+D)\,i,$$
$$f(-i\infty) = 1 - (A+B+C+D)\,i.$$

Daraus folgt:

$$(10a) \quad f(x) = 1,$$
$$(10b) \quad A + B + C + D = 0.$$

Aus $\Delta_1 = 0$ ergibt sich nunmehr

$$A \operatorname{cotg} \pi(x-c_0) + B \operatorname{cotg} \pi(x+c_0) + C \operatorname{cotg} \pi(x+t_g-c_g) + D \operatorname{cotg} \pi(x+t_g+c_g) + 1 = 0.$$

Nun ist

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Setzen wir

$$(11) \quad \operatorname{tg}(\pi x) = y,$$

so erhalten wir

$$(12) \quad A \frac{1 + y\operatorname{tg}(\pi c_0)}{y - \operatorname{tg}(\pi c_0)} + B \frac{1 - y\operatorname{tg}(\pi c_0)}{y + \operatorname{tg}(\pi c_0)} + C \frac{1 - y\operatorname{tg}\pi(t_g - c_g)}{y + \operatorname{tg}\pi(t_g - c_g)} + D \frac{1 - y\operatorname{tg}\pi(t_g + c_g)}{y + \operatorname{tg}\pi(t_g + c_g)} + 1 = 0.$$

Das ist aber eine algebraische Gleichung vierten Grades für die Unbekannte $y = \operatorname{tg}(\pi x)$. Da durch die Angabe von $tg(\pi x)$ die Größe x im Intervall $-\frac{1}{2}$ bis $+\frac{1}{2}$ eindeutig bestimmt ist, so erkennt man, daß (5) und (8) nur vier unabhängige (d. h. nicht nur um eine ganze Zahl verschiedene) Grundlösungen haben.

---

[12]) In den Ausnahmefällen, wo diese Bedingungen nicht erfüllt sind, hat Δ_1 mehrfache Pole. Der Beweisgang wird dann etwas anders (für den Fall $c_g = c_0 + t_g$ haben wir z. B. in (9) statt des bisherigen Gliedes mit C den Ausdruck $C \operatorname{cotg}^2 \pi(x - c_0)$ anzusetzen); aber der Satz über die Zahl der möglichen Lösungen x bleibt erhalten.

Es bleibt noch die Bestimmung der Größen A, B, C, D. Entwickeln wir (9) in der Umgebung der Stelle $x = c_0$ in eine Potenzreihe, so erhalten wir, da ja

$$\operatorname{cotg}\pi(x-c_0) = \frac{1}{\pi(x-c_0)} - \frac{1}{3}\pi(x-c_0) + \cdots$$

ist:

$$\begin{aligned} A &= \pi \cdot \lim_{x\to c_0}[(x-c_0)\cdot\Delta_1], \\ B &= \pi \cdot \lim_{x\to -c_0}[(x+c_0)\cdot\Delta_1], \\ C &= \pi \cdot \lim_{x\to c_g-t_g}[(x+t_g-c_g)\cdot\Delta_1], \\ D &= \pi \cdot \lim_{x\to -c_g-t_g}[(x+t_g+c_g)\cdot\Delta_1]. \end{aligned} \tag{13}$$

Mithin wird aus (8):

(14)

$$A = \frac{\pi}{2c_0}\begin{vmatrix} \cdots & 1 & -\frac{a_{-1}\zeta}{(c_0-1)^2-c_0^2} & -\frac{a_{-2}\zeta}{(c_0-1)^2-c_0^2}\cdots & -\frac{a_{-g}\zeta}{(c_0-1)^2-c_0^2} & \cdots \\ \cdots & -a_1\zeta & 0 & -a_{-1}\zeta & \cdots -a_{-g+1}\zeta & \cdots \\ \cdots & -\frac{a_2\zeta}{(c_0+1)^2-c_0^2} & -\frac{a_1\zeta}{(c_0+1)^2-c_0^2} & 1 & \cdots -\frac{a_{-g+2}\zeta}{(c_0+1)^2-c_0^2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{a_g\zeta}{(c_0+t_g-1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{g-1}\zeta}{(c_0+t_g-1)^2-c_g^2} & \cdots & 1 & -\frac{a_{-1}\zeta}{(c_0+t_g-1)^2-c_g^2}\cdots \\ \cdots & -\frac{a_{g+1}\zeta}{(c_0+t_g)^2-c_g^2} & -\frac{a_g\zeta}{(c_0+t_g)^2-c_g^2} & \cdots & -\frac{a_1\zeta}{(c_0+t_g)^2-c_g^2} & 1 \quad \cdots \\ \cdots & -\frac{a_{g+2}\zeta}{(c_0+t_g+1)^2-c_g^2} & -\frac{a_{g+1}\zeta}{(c_0+t_g+1)^2-c_g^2} & \cdots & -\frac{a_2\zeta}{(c_0+t_g+1)^2-c_g^2} & \cdots \end{vmatrix}$$

Entwickeln wir, wie es für die Anwendungen meist nötig ist, A nach Potenzen von ζ, so lautet das Anfangsglied

$$A = \frac{\pi}{2c_0}\left\{\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,|a_n|^2}{4c_0^2-n^2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{|a_{g+n}|^2}{(c_0+t_g+n)^2-c_g^2}\right]\zeta^2 + \cdots\right\}.$$

Die Größen A, B, C, D können wir noch in eine einheitliche Form bringen. Schreiben wir nämlich

$$A = \frac{\pi}{2c_0}\cdot F(c_0; c_g), \tag{14a}$$

so wird

$$B = -\frac{\pi}{2c_0}\cdot F(-c_0; c_g). \tag{14b}$$

Ferner wird

$$C = \frac{\pi}{2c_g}\begin{vmatrix} \cdots & 1 & -\frac{a_{-1}\zeta}{(c_g-t_g-1)^2-c_0^2} & \cdots \\ \cdots & -\frac{a_1\zeta}{(c_g-t_g)^2-c_0^2} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & 1 & -\frac{a_{-1}\zeta}{(c_g-1)^2-c_g^2}\cdots \\ \cdots & \cdots & -a_1\zeta & 0 \quad \cdots \end{vmatrix}.$$

Um nun C durch dieselbe Funktion F ausdrücken zu können wie A und B, denken wir uns C gemäß (13) erzeugt, sodann in der Form (7b) geschrieben und dadurch umgeformt, daß wir zunächst die Nenner herausziehen. (Der Strich am Produktzeichen bedeutet, daß der Wert $n = 0$ auszulassen ist.)

$$C = \pi \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(c_g - t_g)^2 - c_0^2} \cdot \frac{1}{2c_g} \prod_{n=-m}^{+m}{}' \frac{1}{(c_g - t_g + n)^2 - c_0^2} \cdot \frac{1}{(c_g + n)^2 - c_g^2} \cdot$$

$$\begin{vmatrix}
(c_g-t_g-n)^2-c_0^2 \cdots & -a_{-n}\zeta & \cdots & -a_{-2n}\zeta & -a_{-g}\zeta & \cdots -a_{-g-n}\zeta \cdots & -a_{-g-2n}\zeta \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_n\zeta & \cdots (c_g-t_g)^2-c_0^2 \cdots & & -a_{-n}\zeta & -a_{-g+n}\zeta & \cdots -a_{-g}\zeta \cdots & -a_{-g-n}\zeta \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{2n}\zeta & \cdots -a_n\zeta & \cdots (c_g-t_g+n)^2-c_0^2 & -a_{-g+2n}\zeta & \cdots -a_{-g+n}\zeta \cdots & -a_{-g}\zeta \\
-a_g\zeta & \cdots -a_{g-n}\zeta & \cdots -a_{g-2n}\zeta & (c_g-n)^2-c_g^2 \cdots & -a_{-n}\zeta \cdots & -a_{-2n}\zeta \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{g+n}\zeta & \cdots -a_g\zeta & \cdots -a_{g-n}\zeta & -a_n\zeta & \cdots\ 0 & \cdots -a_{-n}\zeta \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-a_{g+2n}\zeta & \cdots -a_{g+n}\zeta & \cdots -a_g\zeta & -a_{2n}\zeta & \cdots -a_n\zeta & \cdots (c_g+n)^2-c_g^2
\end{vmatrix}$$

Die auf der rechten Seite stehende Determinante ist, abgesehen von den Elementen der Hauptdiagonale, symmetrisch zur Nebendiagonale. Wir kippen sie um diese Nebendiagonale: hierbei bleibt alles völlig ungeändert bis auf die Elemente der Hauptdiagonale, die ihre Plätze austauschen. Nun dividieren wir wieder die einzelnen Zeilen durch die vorher herausgezogenen Nenner, so daß die Diagonalelemente 1 werden (in einem Falle Null), und gehen zur unendlichen Determinante über. Wir erhalten

$$C = \frac{\pi}{2c_g} \begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots\ 1 & -\dfrac{a_{-1}\zeta}{(c_g+1)^2-c_g^2} \cdots & -\dfrac{a_{-g}\zeta}{(c_g+1)^2-c_g^2} & \cdots & \cdots \\
\cdots -a_1\zeta & 0 \quad \cdots & -a_{-g+1}\zeta & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & 1 & -\dfrac{a_{-1}\zeta}{(c_g-t_g+1)^2-c_0^2} \cdots & & \\
\cdots & -\dfrac{a_1\zeta}{(c_g-t_g)^2-c_0^2} & 1 & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}.$$

Der Vergleich mit (14), (14a) und (14b) liefert

$$\text{(14c)} \qquad C = \frac{\pi}{2c_g} \cdot F(-c_g; c_0), \qquad D = -\frac{\pi}{2c_g} \cdot F(c_g; c_0).$$

Bevor wir zu dem allgemeinsten Fall übergehen, sei noch folgende Bemerkung gemacht. Sofern die Determinanten (7) unbedingt konvergent sind, können wir sie in gewöhnliche, *zwei*seitig-unendliche Determinanten umwandeln. Wir vertauschen dazu die Zeilen und Spalten derart, daß die folgenden Elemente in der angegebenen Reihenfolge Diagonalelemente werden: $a_{00}, d_{00}, a_{11}, a_{-1-1}, d_{11}, d_{-1-1}, a_{22}, \ldots$. Z. B. lassen sich (8) und (14), da sie unbedingt konvergent sind, in diese Form bringen. Das gleiche gilt von den Unterdeterminanten von (8), die zur Berechnung der Verhältnisse der zu einer bestimmten Lösung x gehörigen ψ_g dienen. Freilich büßen die Determinanten dabei die Übersichtlichkeit ihres Aufbaus z. T. ein; sie können aber u. U. eine für die Auswertung bequemere Form gewinnen.

4. *Unendliche Determinante mit N^2-fachem Ursprung.* Die Frage nach der Zahl und den Werten der Lösungen x für den Fall zweier Wertepaare (g_1, g_2) ist im Vorstehenden

beantwortet. Man erkennt aber leicht, daß sich die Lösung ohne weiteres auf den Fall beliebig vieler Wertepaare (g_1, g_2), (h_1, h_2), ... übertragen läßt. Denn die Überlegungen, die zu den Gleichungen (5), (8), (9), (10a), (10b), (12) und (13) geführt haben, sind auch im allgemeineren Falle in gleicher Weise durchzuführen. Wir wollen also jetzt in (1) alle diejenigen Werte ψ_g berücksichtigen, die zu N verschiedenen festen Wertepaaren (g_1, g_2) gehören, während $g_3 = n$ jedesmal alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen kann. Das Gleichungssystem (4) erweitert sich dann, so daß N Typen von Gleichungen in ihm auftreten; ebenso gibt es je N Größen c_g und t_g. An die Stelle von (5) und (8) treten Determinanten, die als noch weitergehende Verallgemeinerungen der Hillschen aufzufassen sind. Solche Determinanten entstehen allgemein gemäß den erweiterten Gleichungen (7) dadurch, daß wir von N^2 zweifach-unendlichen Zahlenfolgen ausgehen, die jede in Form eines vierseitig unbegrenzten Schemas angeordnet sind, daß wir aus ihnen die den Ausdrücken (7) entsprechenden Determinanten bilden und zur Grenze übergehen.

Für die neue, an die Stelle von (8) tretende Determinante gelten dann genau dieselben Überlegungen wie für (8) selbst. Auch sie ist, abgesehen von den sofort erkennbaren einfachen Polen, wegen (1a) unbedingt konvergent. Auch sie läßt sich, entsprechend den Ausführungen am Schluß des dritten Abschnittes, in eine zweiseitig-unendliche Determinante umwandeln. Schließlich wird aus denselben Gründen wie früher folgende Funktion eine Konstante:

$$f(x) = \Delta_1^{(N)} - \sum_{g_1, g_2} [A_g \operatorname{cotg} \pi(x + t_g - c_g) + B_g \operatorname{cotg} \pi(x + t_g + c_g)].$$

Die Konstante hat wieder gemäß (10a) den Wert $f(x) = 1$.

Daraus folgt dann, daß sich die Gleichung $\Delta_1^{(N)} = 0$ im Anschluß an (12) auf eine Gleichung vom Grade $2N$ für die Unbekannte $\operatorname{tg}(\pi x)$ zurückführen läßt; hieraus geht insbesondre hervor, daß es nur $2N$ unabhängige (d. h. nicht nur um ganze Zahlen verschiedene) Werte x gibt, die die Determinante zum Verschwinden bringen, für die also das Gleichungssystem (1) lösbar ist.

Eingegangen 14. Februar 1938.

Abelsche Erweiterungen über algebraischen Funktionenkörpern einer Unbestimmten mit absolut-algebraischem Konstantenkörper.

Von *Mikao Moriya* in Sapporo (Japan).

1. Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten mit vollkommenem Konstantenkörper. Ist dann $\mathfrak{m}$ ein ganzer Divisor aus K, so kann man wie in der algebraischen Zahlentheorie die Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{m}$ und danach die Divisorengruppen in K definieren [1]). Wenn man über K eine endliche separable Erweiterung $\overline{K}$ betrachtet, so kann man in geläufiger Weise die dem Körper $\overline{K}$ mod $\mathfrak{m}$ zugeordnete Divisorengruppe definieren.

Nun heiße eine endliche separable Erweiterung $\overline{K}$ über K *Klassenkörper* zu einer Divisorengruppe H in K, wenn

1. zu einem Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ von H die $\overline{K}$ mod $\mathfrak{m}$ zugeordnete Divisorengruppe gleich H ist,

2. der Index von H gleich dem Grade von $\overline{K}/K$ ist.

Wenn man insbesondere als Konstantenkörper von K einen endlichen Körper [2]) nimmt, so existieren Klassenkörper über K. Man kann dabei ein Analogon zur Klassenkörpertheorie aus der algebraischen Zahlentheorie entwickeln. Es gelten nämlich für die Klassenkörper über K der Anordnungssatz, Eindeutigkeitssatz, Isomorphiesatz, Umkehrsatz, Existenzsatz und das Zerlegungsgesetz [3]).

Betrachtet man aber algebraische Funktionenkörper einer Unbestimmten mit *endlichem algebraischen Zahlkörper* als Konstantenkörper und nimmt an, daß alle obigen Sätze aus der Klassenkörpertheorie über diesen Funktionenkörpern als Grundkörpern gelten, so kann man zeigen, daß sich Widersprüche ergeben.

Es sei nämlich K ein derartiger algebraischer Funktionenkörper und L eine endliche separable *abelsche* Erweiterung von K. Dann ist L nach dem Umkehrsatz ein Klassenkörper zu einer Divisorengruppe H in K. Ist $\mathfrak{p}$ ein zum Führer von H primer Prim-

[1]) Vgl. F. K. Schmidt, Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Konstantenbereich, Sitzungsberichte Erlangen **62** (1930), S. 267—284, insbes. § 1.

[2]) Der Konstantenkörper von K ist also absolut-algebraisch von Primzahlcharakteristik und sogar endlich über seinem Primkörper.

[3]) Vgl. die in [1]) angeführte Arbeit, ferner

H. Hasse, Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionenkörper, insbesondere bei endlichem Konstantenkörper, dieses Journ. **172** (1934), S. 37—54.

E. Witt, Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper, dieses Journ. **173** (1934), S. 43—51.

M. Moriya, Rein arithmetisch-algebraischer Aufbau der Klassenkörpertheorie über algebraischen Funktionenkörpern einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper, Jap. Journ. of Math. **14** (1938), S. 67—84.

divisor aus K und $H_\mathfrak{p}$ die $\mathfrak{p}$ enthaltende Klasse nach H, so zerfällt $\mathfrak{p}$ nach dem Zerlegungsgesetz in L in lauter verschiedene Primdivisoren vom Relativgrade f nach K, wenn die Ordnung von $H_\mathfrak{p}$ gleich f ist. Ich bezeichne nun mit H^* die von $H_\mathfrak{p}$ erzeugte Divisorengruppe in K. Dann existiert nach dem Existenzsatz ein Klassenkörper L_1 zu H^*, welcher seinerseits nach dem Anordnungssatz ein Teilkörper von L/K ist. Weil nach dem Zerlegungsgesetz der Primdivisor $\mathfrak{p}$ in L_1 voll zerlegt ist, so ist bekanntlich L_1 ein Teilkörper des Zerlegungskörpers eines Primteilers von $\mathfrak{p}$ in L. Ferner ist L nach dem Umkehrsatz ein Klassenkörper zu einer Divisorengruppe H_1 aus L_1. Man beweist nun in geläufiger Weise, daß H_1 aus allen denjenigen (zu einem Erklärungsmodul von H primen) Divisoren in L_1 besteht, deren Normen nach K in H hineinfallen. Bezeichnet also A_1 die Gesamtheit aller Divisoren aus L_1, so ist offenbar

$$A_1/H_1 \cong H^*/H.$$

Also ist A_1/H_1 zyklisch und infolgedessen L nach dem Isomorphiesatz über L_1 zyklisch. Hieraus schließt man sofort:

Die Zerlegungsgruppen von fast allen Primdivisoren aus L sind stets zyklisch.

Nimmt man aber als L eine *nicht-zyklische* abelsche Erweiterung über K, so existieren in L unendlich viele Primdivisoren, deren Zerlegungsgruppen nicht zyklisch sind [4]), weil über dem Konstantenkörper von K der *Hilbertsche Irreduzibilitätssatz* gilt [5]). Dies steht aber im Widerspruch mit dem oben Gesagten.

2. In diesem Paragraphen bedeutet K einen algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten, dessen Konstantenkörper k absolut-algebraisch von Primzahlcharakteristik und über seinem Primkörper von unendlichem Grade ist. Offenbar ist k der Vereinigungskörper von Körpern $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$, von denen jeder ein endlicher Körper ist und den vorangehenden enthält. Der Grad von k_i nach dem Primkörper besitzt für $i \to \infty$ eine *Steinitzsche G-Zahl* als seinen Grenzwert, den ich im folgenden den *absoluten Grad* von k nennen will. Nun entsteht der Funktionenkörper K aus k durch die Adjunktion eines über k transzendenten Elementes x und die nachfolgende Adjunktion eines separablen Elementes y über $k(x)$. Da offenbar y auch über $k_i(x)$ algebraisch ist, so muß ein Index I derart vorhanden sein, daß $K_i = k_i(x, y)$ für jeden Index $i \geqq I$ ein algebraischer Funktionenkörper mit k_i als Konstantenkörper und $[K : k(x)] = [K_i : k_i(x)]$ ist. Ferner ist dabei $K_{i+1} = K_i k_{i+1}$ und $[K_{i+1} : K_i] = [k_{i+1} : k_i]$. Schließlich ist K die Vereinigung der Körper $K_I, \ldots, K_i, \ldots$, von denen jeder im folgenden ein *Approximationskörper* von K genannt wird.

Nun bestimmt ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ aus K in jedem Approximationskörper K_i $(i \geqq I)$ einen einzigen durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Primdivisor $\mathfrak{p}_i$. Es ist also durch $\mathfrak{p}$ stets eine Primdivisorenfolge $\mathfrak{p}_I, \ldots, \mathfrak{p}_i, \ldots$ so bestimmt, daß $\mathfrak{p}_i$ für $j > i$ durch $\mathfrak{p}_j$ teilbar ist. Liegt umgekehrt eine solche Primdivisorenfolge vor, so bestimmt sie in K eindeutig einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ derart, daß $\mathfrak{p}$ in jedem $\mathfrak{p}_i$ aufgeht. Da für $j > i$ der Grad [6]) von $\mathfrak{p}_i$ stets durch den von $\mathfrak{p}_j$ teilbar ist, so ist der Grad von $\mathfrak{p}_j$ für hinreichend großes j gleich dem von $\mathfrak{p}$. Ferner ist dabei $\mathfrak{p}$ der einzige Primteiler von $\mathfrak{p}_j$ in K. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß ein beliebiger Primdivisor aus einem Approximationskörper von K stets endlich viele verschiedene Primteiler in K besitzt.

---

[4]) Vgl. F. K. Schmidt, Über die Kennzeichnung algebraischer Funktionenkörper durch ihren Regularitätsbereich, dieses Journ. **171** (1934), S. 162—169.

[5]) Vgl. W. Franz, Untersuchungen zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz, Math. Zeitschr. **33** (1930), S. 275—293.

[6]) Der Grad von $\mathfrak{p}_i$ bedeutet bekanntlich den Relativgrad des Restklassenkörpers mod $\mathfrak{p}_i$ in K_i nach k_i.

Ist nun $\mathfrak{a}_i$ ein vom Einsdivisor verschiedener Divisor aus K_i, so erhält man aus $\mathfrak{a}_i$ einen Divisor $\mathfrak{a}$ aus K, indem man jeden Primteiler von $\mathfrak{a}_i$ durch das Produkt aus seinen sämtlichen Primteilern in K ersetzt. Diesen durch $\mathfrak{a}_i$ eindeutig bestimmten Divisor $\mathfrak{a}$ nenne ich im folgenden die *Erweiterung von* $\mathfrak{a}_i$ *in* K. Ist $\mathfrak{a}_i$ der Einsdivisor, so verabreden wir, daß die Erweiterung von $\mathfrak{a}_i$ in K der Einsdivisor aus K ist. Umgekehrt existiert zu einem Divisor $\mathfrak{a}$ aus K stets ein Divisor $\mathfrak{a}_i$ aus einem passend gewählten Approximationskörper K_i derart, daß die Erweiterung von $\mathfrak{a}_i$ gerade $\mathfrak{a}$ wird.

Es sei $\mathfrak{m}$ ein ganzer Divisor aus K. Dann nennt man den größten gemeinsamen Teiler aller durch $\mathfrak{m}$ teilbaren Divisoren aus K_i den Durchschnitt von $\mathfrak{m}$ mit K_i und bezeichnet ihn mit $\mathfrak{m} \cap K_i$. Ist nun $H^{(\mathfrak{m})}$ eine mod $\mathfrak{m}$ erklärte Divisorengruppe in K, so bezeichne ich mit $H_i^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller derjenigen Divisoren aus K, deren Erweiterungen in K zu $H^{(\mathfrak{m})}$ gehören, und nenne sie den Durchschnitt von $H^{(\mathfrak{m})}$ mit K_i. Wie man sich leicht überzeugt, enthält $H_i^{(\mathfrak{m})}$ bloß zu $\mathfrak{m} \cap K_i$ prime Divisoren aus K_i und den Strahl mod $\mathfrak{m} \cap K_i$ in K_i, d. h. $H_i^{(\mathfrak{m})}$ ist eine mod $\mathfrak{m} \cap K_i$ erklärte Divisorengruppe in K_i [7]). Nun beweist man:

Die mod $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ erklärten Divisorengruppen $H^{(\mathfrak{m})}$, $H^{(\mathfrak{n})}$ in K sind dann und nur dann einander gleich, wenn für jeden Index $i \geqq I$ die Durchschnitte von $H^{(\mathfrak{m})}$ und $H^{(\mathfrak{n})}$ mit K_i einander gleich sind [8]).

Ferner gilt folgender

Satz 1. *Es sei $H^{(\mathfrak{m})}$ eine mod $\mathfrak{m}$ erklärte Divisorengruppe in K und $A^{(\mathfrak{m})}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{m}$ primen Divisoren aus K. Ist dann die Faktorgruppe $A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})}$ endlich, so gilt für einen hinreichend großen Index i die Isomorphierelation*

$$A^{(\mathfrak{m})}/H^{(\mathfrak{m})} = A_i^{(\mathfrak{m})}/H_i^{(\mathfrak{m})},$$

wo $A_i^{(\mathfrak{m})}$ bzw. $H_i^{(\mathfrak{m})}$ den Durchschnitt von $A^{(\mathfrak{m})}$ bzw. $H^{(\mathfrak{m})}$ mit K_i bezeichnet. Ferner kann man ein Repräsentantensystem aller Klassen von $A_i^{(\mathfrak{m})}$ nach $H_i^{(\mathfrak{m})}$ so wählen, daß die Erweiterungen der Divisoren aus diesem System in K ein Repräsentantensystem aller Klassen von $A^{(\mathfrak{m})}$ nach $H^{(\mathfrak{m})}$ bilden [9]).

3. In diesem Paragraphen bedeutet K wieder einen algebraischen Funktionenkörper wie in **2**. Ist $\bar{K}$ eine separable Erweiterung vom Grade n über K und ϑ ein primitives Element von $\bar{K}$ über K, so gibt es eine natürliche Zahl $I_1 (\geqq I)$ von der Art, daß für jeden Index $i \geqq I_1$ der Körper $\bar{K}_i = K_i(\vartheta)$ über K_i vom Grade n ist. Ist $\mathfrak{A}_i$ ein Divisor aus $\bar{K}_i$ und $\mathfrak{A}$ die Erweiterung von $\mathfrak{A}_i$ in K, so kann man leicht zeigen, daß $N_{\bar{K}K}(\mathfrak{A})$ die Erweiterung von $N_{\bar{K}_iK_i}(\mathfrak{A}_i)$ in K ist, weil dies für einen Primdivisor $\mathfrak{P}_i$ aus $\bar{K}_i$ gilt.

Wenn man mit $H^{(\mathfrak{m})}$ die $\bar{K}$ mod $\mathfrak{m}$ zugeordnete Divisorengruppe in K und mit $\mathfrak{m}_i$ den Durchschnitt von $\mathfrak{m}$ mit K_i $(i \geqq I_1)$ bezeichnet, so kann man nach dem eben Gesagten leicht zeigen, daß $H^{(\mathfrak{m})}$ die Erweiterungen aller Divisoren aus $H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ in K enthält, wo $H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ die $\bar{K}_i$ mod $\mathfrak{m}_i$ zugeordnete Divisorengruppe in K_i bedeutet. Umgekehrt kann man beweisen, daß jeder Divisor aus $H^{(\mathfrak{m})}$ die Erweiterung eines Divisors aus einem passend gewählten $H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ ist. Hieraus schließt man, daß $H^{(\mathfrak{m})}$ die Vereinigungsmenge der Er-

---

[7]) Vgl. M. Moriya, Klassenkörpertheorie im Großen für unendliche algebraische Zahlkörper, Journ. of Hokkaido **6** (1937), S. 63—101, insbes. § 2. Ich zitiere diese Arbeit mit M.

[8]) Vgl. M., § 2.

[9]) Vgl. M., § 2.

weiterungen aller Divisoren aus den sämtlichen $H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ $(i \geqq I_1)$ ist. Der Index von $H^{(\mathfrak{m})}$ ist also endlich und infolgedessen nach Satz 1 gleich dem Index des Durchschnittes $H_i^{(\mathfrak{m})}$ von $H^{(\mathfrak{m})}$ mit einem passend gewählten Approximationskörper K_i $(i \geqq I_1)$. Wie vorher bemerkt, ist $H_i^{(\mathfrak{m})}$ mod $\mathfrak{m}_i$ erklärt; also enthält $H_i^{(\mathfrak{m})}$ mengentheoretisch $H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$. Da nach dem Abgrenzungssatz der Index von $H_i^{(\mathfrak{m}_i)}$ ein Teiler von n ist, so ist es auch der Index von $H_i^{(\mathfrak{m})}$. Somit ist gezeigt:

Der Index von $H^{(\mathfrak{m})}$ ist ein Teiler von n.

Ist nun $\mathfrak{n}$ ein Multiplum von $\mathfrak{m}$, so ist der Index der $\overline{K}$ mod $\mathfrak{n}$ zugeordneten Divisorengruppe in K durch den von $H^{(\mathfrak{m})}$ teilbar. Hieraus schließt man in bekannter Weise, daß es in K solche $\overline{K}$ (nach irgendwelchen Moduln erklärten) zugeordneten Divisorengruppen gibt, deren Indizes *maximal* sind. Diese Divisorengruppen vom maximalen Index sind einander gleich und werden daher im folgenden einfach *die $\overline{K}$ zugeordnete Divisorengruppe* in K genannt. Damit ist bewiesen:

Satz 2. *Ist $\overline{K}$ eine separable Erweiterung vom Grade n über K, so ist der Index der $\overline{K}$ zugeordneten Divisorengruppe in K ein Teiler von n.*

4. Wir betrachten nun insbesondere eine über K separable *abelsche* Erweiterung L vom Grade n, wo K wieder einen algebraischen Funktionenkörper wie in **2** bedeutet. Dann können wir offenbar eine natürliche Zahl $I_1(\geqq I)$ so bestimmen, daß L_{I_1} über K_{I_1} separabel abelsch vom Grade n und $L_{I_1}k = L$ ist. Für jeden Index $i \geqq I_1$ ist also $L_i = L_{I_1}k_i$ über K_i separabel abelsch vom Grade n und L der Vereinigungskörper von den $L_{I_1}, \ldots, L_i, \ldots$

Bezeichnet nun H die L zugeordnete Divisorengruppe in K und $\mathfrak{m}$ einen geeigneten Erklärungsmodul von H, so ist nach Satz 1 für ein hinreichend großes i $(\geqq I_1)$ der Index von $H^{(\mathfrak{m})}$ gleich dem des Durchschnittes $H_i^{(\mathfrak{m})}$ von $H^{(\mathfrak{m})}$ mit K_i und überdies $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \cap K_i$ ein Multiplum des Führers $\mathfrak{f}_i$ der L_i zugeordneten Divisorengruppe in K_i. Es enthält also $H_i^{(\mathfrak{m})}$ die L_i mod $\mathfrak{f}_i$ zugeordnete Divisorengruppe in K_i; folglich kann man mit Hilfe des Verschiebungssatzes beweisen, daß der Index von $H_i^{(\mathfrak{m})}$ zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von k prim ist [10]). Aus Satz 2 schließt man also:

Derjenige maximale Teiler n_0 von n, welcher zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von k prim ist, ist durch den Index von H teilbar.

Man kann noch wie in der algebraischen Zahlentheorie beweisen, daß der Index von H genau gleich n_0 ist [11]). Allgemein gilt folgender

Satz 3. *Es sei $\overline{K}$ eine endliche separable Erweiterung von K und L derjenige maximale abelsche Teilkörper von $\overline{K}/K$, dessen Grad nach K zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von k prim ist. Dann ist die $\overline{K}$ zugeordnete Divisorengruppe in K gleich der L zugeordneten* [12]).

Aus Satz 3 erhält man folgendes Kriterium über Klassenkörper:

Eine endliche separable Erweiterung $\overline{K}$ von K ist dann und nur dann Klassenkörper, wenn

1. *$\overline{K}$ über K abelsch,*
2. *$[\overline{K} : K]$ zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von k prim ist.*

---

[10]) Vgl. M., § 3.
[11]) Vgl. M., § 3.
[12]) Vgl. M., § 4.

Für die Klassenkörper über K kann man den Isomorphiesatz, Anordnungssatz, Eindeutigkeitssatz, Verschiebungssatz und das Zerlegungsgesetz beweisen. Für die Beweise dieser Sätze verweise ich hier auf meine oben zitierte Arbeit.

Um den Existenzsatz zu beweisen, muß man sich auf eine spezielle Klasse von Divisorengruppen H beschränken, welche vorläufig *K-Gruppen* (Klassenkörpergruppen) genannt werden:

Es muß in $K = k(x, y)$ ein algebraischer Funktionenkörper $K_* = k_*(x, y)$ mit einem endlichen Konstantenkörper k_* und ein Erklärungsmodul $\mathfrak{m}$ von H derart vorhanden sein, daß für die mod $\mathfrak{m}$ erklärte Divisorengruppe $H^{(\mathfrak{m})}$ der Durchschnitt $H^{(\mathfrak{m})} \cap K_0$ mit einem beliebigen K_* enthaltenden Teilkörper K_0 von K mit endlichem Konstantenkörper gleich der Divisorengruppe in K_0 ist, deren Normen nach K_* in $H^{(\mathfrak{m})} \cap K_*$ hineinfallen.

Man beweist, daß die einer endlichen separablen Erweiterung zugeordnete Divisorengruppe in K stets eine K-Gruppe von endlichem Index ist [13]). Ferner ist der Index einer K-Gruppe von endlichem Index prim zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von k [14]).

Es gilt

Satz 4. *Zu jeder K-Gruppe von endlichem Index in K existiert ein Klassenkörper* [15]).

---

[13]) Vgl. M., § 4..

[14]) Vgl. Moriya, Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper, Journ. of Hokkaido **5** (1936), S. 9—66, insbes. § 5.

[15]) Vgl. M., § 5.

Eingegangen 5. April 1938.

Zur Theorie der reellen Inzidenzabbildungen. II.

Die Gruppe der Inzidenzabbildungen von $S(n^2-n+1/2/n)$. G_{168} von $S(7/2/3)$ und ihre zyklischen Untergruppen. Die Inzidenzabbildungen der Viereckgeometrie $S(13/2/4)$.

Von *Max Steck* in München.

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit setzt die Untersuchungen meiner früheren, in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung [1]) in systematischer Weise fort und benützt deren Voraussetzungen (insbesondere die axiomatischen, **E**, **A. 1***, **A. 2***), Ergebnisse und Entwicklungen in vollem Umfange. Aus diesem Grunde und im Interesse einer möglichst kurzen Angabe der Rückverweise war es geboten, Definitionen, Sätze und Nummern in dieser Arbeit einfach weiterzuzählen. Außerdem wird die gesamte dort eingeführte Terminologie und Symbolik auch hier wieder verwendet; ferner wird auf das dort angegebene Schrifttum verwiesen.

Dann stellt die vorliegende Arbeit als Ausbau der Darlegungen des letzten Paragraphen von I in ihrem 1. Kapitel die unentbehrlichen Mittel für eine gruppentheoretische Behandlung der reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ in endlichen projektiven Geometrien $\boldsymbol{S}(n^2-n+1/2/n)$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ldots)$ bereit und leitet insbesondere die *Ordnung* (n^2-n+1) (n^2-n) (n^2-2n+1) (n^2-4n+4) *der Gruppe* $\boldsymbol{G}$ *der reellen Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$ *von* $\boldsymbol{S}(n^2-n+1/2/n)$ allgemein und explizit her.

Das 2. Kapitel bringt die Untersuchung der Gruppe $\boldsymbol{G}_{168}$ der reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ des Fanoschen Ausschlußaxioms $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ und gibt ihre in diesem axiomatisch-geometrischen Zusammenhang auftretenden zyklischen Untergruppen vollständig an. Damit werden die geometrisch-axiomatischen Ergebnisse des II. Kapitels von I gruppentheoretisch vollständig neu beschrieben und im Sinne einer *gruppentheoretischen Darstellung* (Deutung) zusammengefaßt.

Das 3. Kapitel endlich erschließt die *vollständige Inzidenzabbildungsstruktur des Minimalmodells einer Geometrie des vollständigen Vierecks* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ [2]), indem es, teils rein geometrisch, teils mit gruppentheoretischen Methoden die sämtlichen in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ überhaupt möglichen Typen $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{I})}$, $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{II})}$, $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{III})}$, $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{IV})}$, $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VI})}$, $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$ reeller Inzidenzabbildungen herleitet und geometrisch die Nichtexistenz des dreifixpunktigen Inzidenzabbildungstyps $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{V})}$ in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ beweist. — Als Mitergebnis dieser geometrischen Untersuchung, die als Kernstück dieser Arbeit gewertet werden will, gewinnen wir — zum Beweis der Vollständigkeit — die Gruppe $\boldsymbol{G}_{5616}$ der $\boldsymbol{T}$ von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$. Ihre in diesem Zusammenhang auftretenden zyklischen Untergruppen geben wir vollständig in einer weiteren Arbeit an. Hinweise auf die axiomatische Tragweite der Untersuchungen für die Axiomatik der (reellen und komplexen) projektiven Geometrie sind eingearbeitet und ergänzen die früheren diesbezüglichen Darlegungen (s. Nr. **1**, **2**, **3**, **4**, **13**, **21**).

[1]) M. Steck, Grundlegung einer Theorie der reellen Inzidenzabbildungen in endlichen projektiven Geometrien. I. (Eine geometrische Deutung der zyklischen Gruppen), Journ. f. d. reine u. ang. Math. **179** (1938), 37—64; im folgenden zitiert mit I.

[2]) M. Steck, Eine vollständige endliche Geometrie des vollständigen Vierecks, Deutsche Math. **1** (1936), 588—592.

Kap. I. Die Ordnung der Gruppe der reellen Inzidenzabbildungen T von $S(n^2 - n + 1/2/n)$.

§ 2. *Gruppentheoretische Grundlagen.*

31. Wir behaupten den folgenden

Satz 20. *Die reellen Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$ *einer jeden endlichen, projektiven Geometrie* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$ *bilden eine endliche Gruppe* $\boldsymbol{G}$.

Beweis. Der Satz ist dann bewiesen, wenn aus der Definition der $\boldsymbol{T}$ (s. **D. 1.**, Nr. 5) und aus den aus ihr unmittelbar folgenden Aussagen (s. Nr. **6—11**) gezeigt werden kann, daß die $\boldsymbol{T}$, als System verschiedener Elemente, die vier bekannten Postulate I—IV des Gruppenbegriffs [3]) erfüllen:

I. *Das Gruppengesetz.* Ihm zufolge ist jedem geordneten Paar $\boldsymbol{T}_\lambda$, $\boldsymbol{T}_\mu$ von gleichen oder verschiedenen Elementen des Systems eindeutig ein Element $\boldsymbol{T}_\nu$ desselben Systems zugeordnet, das Produkt $\boldsymbol{T}_\lambda \cdot \boldsymbol{T}_\mu = \boldsymbol{T}_\nu$ der beiden Elemente $\boldsymbol{T}_\lambda$ und $\boldsymbol{T}_\mu$. Daß die in Nr. **10** allgemein angegebenen reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3, \ldots, n^2 - n)$ von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ dem Gruppengesetz gehorchen, ist bereits in Nr. **10** und **11** nachgewiesen worden (z. B. ist $\boldsymbol{T}_1 \cdot \boldsymbol{T}_5 = \boldsymbol{T}_6$, usw.).

II. *Das Assoziativgesetz*, wonach für die Produktbildung die Gleichung

$$(\boldsymbol{T}_\lambda \boldsymbol{T}_\mu)\, \boldsymbol{T}_\nu = \boldsymbol{T}_\lambda (\boldsymbol{T}_\mu \boldsymbol{T}_\nu)$$

gilt. Die Gültigkeit dieser Gleichung läßt sich leicht für jedes Tripel $\boldsymbol{T}_\lambda$, $\boldsymbol{T}_\mu$, $\boldsymbol{T}_\nu$ aus den $\boldsymbol{T}_\varrho$ der Nr. **10** nachweisen. Z. B. ergibt sich für die willkürlich herausgegriffenen $\boldsymbol{T}_\lambda \equiv \boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_\mu \equiv \boldsymbol{T}_5$ und $\boldsymbol{T}_\nu \equiv \boldsymbol{T}_6$ einerseits:

$$(\boldsymbol{T}_1 \cdot \boldsymbol{T}_5)\, \boldsymbol{T}_6 = \boldsymbol{T}_6 \cdot \boldsymbol{T}_6 = (\boldsymbol{T}_6)^2 = \boldsymbol{T}_{12};$$

andererseits ist

$$(\boldsymbol{T}_5 \cdot \boldsymbol{T}_6) = \boldsymbol{T}_{11}, \text{ und es folgt } \boldsymbol{T}_1 \cdot \boldsymbol{T}_{11} = \boldsymbol{T}_{12}.$$

III. *Das Einheitselement*, s. Satz **2** (Nr. **7**) und Nr. **10**, **11**, wonach die identische reelle Inzidenzabbildung $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$ (Identität) als *Einheitselement der Gruppe* gelten kann.

IV. *Das inverse Element.* Daß es zu jedem Element $\boldsymbol{T}$ ein *inverses Element* $\boldsymbol{T}^{-1}$ gibt, so daß der Gleichung $\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$ genügt wird, ist bereits unter Nr. **11** allgemein nachgewiesen worden.

Was schließlich die *Endlichkeit* der Gruppe $\boldsymbol{G}$ anlangt, so folgt sie unmittelbar aus der Definition und Konstruktion der $\boldsymbol{T}$ mit Hilfe eines *endlichen* Möbiusschen Netzes (s. Nr. **6**, **7**).

§ 3. *Die Ordnung der Gruppe* $\boldsymbol{G}$ *der reellen Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$ *von* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$.

32. Unter Nr. **31** ist gezeigt worden, daß die Anzahl der Elemente $\boldsymbol{T}$ von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ endlich, ihre Gruppe $\boldsymbol{G}$ also eine *endliche* Gruppe von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$ ist. Wir zeigen:

Satz 21. *Die Ordnung der Gruppe* $\boldsymbol{G}$ *der reellen Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$ *von* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$ *ist*

$$(n^2 - n + 1)\,(n^2 - n)\,(n^2 - 2n + 1)\,(n^2 - 4n + 4).$$

Die $\boldsymbol{T}$ *von* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *bilden also eine* $\boldsymbol{G}_{(n^2-n+1)(n^2-n)(n^2-2n+1)(n^2-4n+4)}$.

Beweis. Nach **D. 1.** (Nr. **5**) ist jede $\boldsymbol{T}$ dann vollständig bestimmt, wenn zu einem Ausgangsviereck $\{i, j, k, l\}$ das Bildviereck $\{i', j', k', l'\}$ bekannt ist, wobei noch die Punkttripel

$$\{i, j, k\}, \quad \{j, k, l\}, \quad \{k, l, i\}, \quad \{l, i, j\}$$

---

[3]) Vgl. etwa A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl., Berlin 1937, S. 10.

und

$$\{i', j', k'\}, \quad \{j', k', l'\}, \quad \{k', l', i'\}, \quad \{l', i', j'\}$$

sämtlich einzeln nicht kollinear sein müssen. Dies ergibt abzählend:

1) $i \to i'$ oder $i \equiv i'$ insgesamt $(n^2 - n + 1)$ Möglichkeiten der Wahl von i';
2) $j \to j'$ oder $j \equiv j'$ „ $(n^2 - n)$ „ „ „ „ j';
3) $k \to k'$ oder $k \equiv k'$ „ $(n^2 - n - 1) - (n - 2)$ „ „ „ „ k',

wenn benützt wird, daß k' nicht auf der noch $(n - 2)$ weitere Punkte enthaltenden Geraden (i', j') liegen darf;

4) $l \to l'$ ($l \equiv l'$, Identität) insgesamt $(n^2 - n - 2) - 3(n - 2)$ Möglichkeiten der Wahl von l', wenn nämlich benützt wird, daß l' weder auf (i', j'), noch auf (j', k'), noch auf (k', i') liegen darf.

Die Ordnung der Gruppe $\boldsymbol{G}$ ist dann bekanntlich das Produkt der Faktoren, die als Möglichkeiten der Wahl der $\boldsymbol{T}$ vollständig bestimmenden Schritte eintreten können, also nach den obigen vier Schritten 1)—4) gleich

$$(n^2 - n + 1)\,(n^2 - n)\,(n^2 - 2n + 1)\,(n^2 - 4n + 4).$$

33. Für die der Reihe nach in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 3, 4, 5, \ldots$ eintretenden endlichen projektiven Geometrien ergibt dies die folgenden Gruppen $\boldsymbol{G}$ reeller Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$:

1. $n = 3$, $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ mit der Gruppe $\boldsymbol{G}_{168}$;
2. $n = 4$, $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ „ „ „ $\boldsymbol{G}_{5616}$;
3. $n = 5$, $\boldsymbol{S}(21/2/5)$ „ „ „ $\boldsymbol{G}_{60480}$;
4. $n = 6$, $\boldsymbol{S}(31/2/6)$ „ „ „ $\boldsymbol{G}_{372000}$;

. . . . . .

. . . . . .

34. Bekanntlich heißt jedes Teilsystem von Elementen einer Gruppe $\boldsymbol{G}$, das für sich den Postulaten I—IV genügt und daher selbst eine Gruppe bildet, eine *Untergruppe* $\boldsymbol{U}$ von $\boldsymbol{G}$. Die Auffindung der eigentlichen Untergruppen ist bekanntlich eine der Hauptaufgaben der Gruppentheorie. Diese Auffindung im vorliegenden Falle der Gruppe $\boldsymbol{G}_{(n^2-n+1)(n^2-n)(n^2-2n+1)(n^2-4n+4)}$ ist das unseren geometrischen Untersuchungen koordiniert an die Seite tretende gruppentheoretische Ergebnis, das aber in seiner expliziten Form, wie sie von uns angestrebt wird, nur durch Spezialuntersuchung der einzelnen endlichen projektiven Geometrien selbst gewonnen werden kann. Denn es kommt uns nicht so sehr auf die Angabe der Ordnungen der Untergruppen $\boldsymbol{U}$ von $\boldsymbol{G}_{(n^2-n+1)(n^2-n)(n^2-2n+1)(n^2-4n+4)}$ in einem bestimmten System $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ und auf die jeweilige Zahl der $\boldsymbol{U}$ an, als vielmehr auf die explizite Angabe der eine Untergruppe $\boldsymbol{U}$ erzeugenden Elemente. Denn diese letzteren sind *geometrisch-axiomatisch* direkt *als Typen reeller Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *deutbar*, wie wir in der ersten Arbeit I bereits gezeigt haben (s. dort Kap. II.).

Kap. II. Die Gruppe $\boldsymbol{G}_{168}$ der Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ des Fanoschen Ausschlußaxioms $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ und ihre zyklischen Untergruppen.

§ 4. *Die Gruppe* $\boldsymbol{G}_{168}$ *und die Ordnungen ihrer Elemente.*

35. Die Ordnung 168 der bekannten Gruppe $\boldsymbol{G}_{168}$ der reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ des Fanoschen Ausschlußaxioms $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ ergibt sich aus unseren früheren geometrischen Ergebnissen [4]) folgendermaßen und beweist erneut die (dort durch logische Disjunktion bereits auf rein logischem Wege gesicherte) *Vollständigkeit* der dort durchgeführten Untersuchungen:

---

[4]) A. a. O. [1]), Kap. II.

1) Durch Satz 8 (Nr. **16**) sind genau 48 verschiedene fixpunktfreie Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, 48$) in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$, also 48 Elemente $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{I})}$ von $\boldsymbol{G}_{168}$ durch ihre explizite Konstruktion existentiell nachgewiesen worden. Von jedem Element wurde überdies gezeigt (Satz 9, Nr. **17**), daß es die *Elementordnung* 7 besitzt.

2) Satz 11 (Nr. **19**) sagt die Existenz von genau 14 verschiedenen einfixpunktigen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{II})}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, 14$) in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ bei vorgeschriebenem Fixpunkt aus. Da aber jeder Punkt von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ als Fixpunkt vorgeschrieben werden kann, so gibt es also insgesamt $7 \cdot 14 = 98$ Elemente $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{II})}$ von $\boldsymbol{G}_{168}$. Von ihnen haben $7 \cdot 8 = 56$ die *Elementordnung* 3 und $7 \cdot 6 = 42$ die *Elementordnung* 4 (Satz 12, Nr. **20**).

3) Durch Satz 15 (Nr. **23**) ist die Existenz von genau 3 verschiedenen dreifixpunktigen, kollinearen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{III})}$ ($\nu = 1, 2, 3$) in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ bei vorgeschriebenen (kollinearen) Fixpunkten durch explizite geometrische Konstruktion nachgewiesen worden. Es gibt also insgesamt, da jedes der genau sieben Tripel kollinearer Punkte von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ als identisch auf sich bezogene (Fix-)Gerade vorgeschrieben werden kann, genau $7 \cdot 3 = 21$ Elemente $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{III})}$ von $\boldsymbol{G}_{168}$. Von jeder $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{III})}$ wurde ferner gezeigt, daß sie die *Elementordnung* 2 besitzt.

4) Schließlich gibt es (Satz 2, Nr. **7**) noch die Eigenabbildung $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$, das Einheitselement der $\boldsymbol{G}_{168}$.

Aus 1)—4) folgt aber durch Addition der Elementanzahlen

$$48 + 98 + 21 + 1 = 168$$

die Ordnung der Gruppe $\boldsymbol{G}_{168}$ der reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ (s. Satz 22).

§ 5. *Die zyklischen Untergruppen der* $\boldsymbol{G}_{168}$.

36. Nach den Darlegungen des 1. Kapitels dieser Arbeit sind wir jetzt in den Stand gesetzt, die zyklischen Untergruppen der $\boldsymbol{G}_{168}$, deren Elementen die geometrische Bedeutung von *Typen* reeller Inzidenzabbildungen zukommt (*Invarianz von gewissen Punkten und Geraden*) anzugeben.

1) Nach Satz 9 (Nr. **17**) bilden die 48 fixpunktfreien Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{I})}$ von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *genau* 8 *eigentliche zyklische Untergruppen der Ordnung* 7 *von* $\boldsymbol{G}_{168}$.

2) Nach Satz 12 (Nr. **20**) bilden die insgesamt 98 einfixpunktigen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{II})}$ von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *genau* $7 \cdot 4 = 28$ *eigentliche zyklische Untergruppen der Ordnung* 3 und *genau* $7 \cdot 3 = 21$ *eigentliche zyklische Untergruppen der Ordnung* 4 von $\boldsymbol{G}_{168}$.

3) Nach Satz 16 (Nr. **24**) bilden die insgesamt 21 dreifixpunktigen, kollinearen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{III})}$ von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *genau* 21 *eigentliche zyklische Untergruppen der Ordnung* 2 von $\boldsymbol{G}_{168}$

37. Die Ergebnisse von Nr. **35** und Nr. **36** fassen wir jetzt in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 22. *Die reellen Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$ *der endlichen projektiven Geometrie* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ [*Fanosches Ausschlußaxiom*] *bilden eine Gruppe* $\boldsymbol{G}_{168}$. *Sie umfaßt*:

a) 48 *Elemente der Ordnung* 7, *die dem fixpunktfreien Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{I})}$ *angehören, und die genau* 8 *eigentliche zyklische Untergruppen der Ordnung* 7 *bilden*;

b) 56 *Elemente der Ordnung* 3, *die dem einfixpunktigen Inzidenzabbildungshaupttyp* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{II})}$ *angehören, und die genau* 28 *eigentliche zyklische Untergruppen der Ordnung* 3 *bilden*;

c) 42 *Elemente der Ordnung* 4, *die ebenfalls dem einfixpunktigen Inzidenzabbildungshaupttypus* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{II})}$ *angehören, und die genau* 21 *eigentliche zyklische Untergruppen der Ordnung* 4 *bilden*;

d) 21 *Elemente der Ordnung* 2, *die dem dreifixpunktigen kollinearen Inzidenzabbildungstypus* $\boldsymbol{T}^{(III)}$ *angehören, und die genau* 21 *eigentliche zyklische Untergruppen der Ordnung* 2 *bilden*;

e) *das Einheitselement* $\boldsymbol{T}^{(VII)}$.

Damit ist die den geometrischen Aussagen koordinierte gruppentheoretische Aussage über $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ gewonnen.

Kap. III. Die vollständige Inzidenzabbildungsstruktur der minimalen endlichen Viereckgeometrie $\boldsymbol{S}(13/2/4)$.

38. In diesem Kapitel untersuchen wir die endliche projektive Geometrie des in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 4$ eintretenden Veblensystems $\boldsymbol{S}(13/2/4)$, wobei wir uns die Aufgabe stellen, sämtliche in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ bei festgehaltenem endlichen reellen Möbiusschen Ausgangsnetz überhaupt möglichen reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ aufzufinden. Wir wissen bereits (Satz 21, Nr. **32**), daß es deren 5616 gibt. Des weiteren muß dann ihre Einteilung in *Typen* der in der ersten Arbeit I (§ 4) charakterisierten Art gegeben und deren genaue Zahlen ermittelt werden. Endlich sollen, in einer dieser Arbeit folgenden Abhandlung die sämtlichen in diesem Zusammenhang auftretenden eigentlichen zyklischen Untergruppen der $\boldsymbol{G}_{5616}$ aufgewiesen und in einer gruppentheoretischen Allgemeinaussage die Struktur von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ vollständig beschrieben werden.

Das Veblensystem $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ habe ich bereits früher [5]) als Tafel 7 (S. 584) angegeben und in einer weiteren Arbeit [6]) als ein vollständiges *Minimalmodell einer Geometrie des vollständigen Vierecks* nachgewiesen. Durch seine jetzt durchzuführende geometrische Untersuchung wird der endliche, ebene Bereich von projektivem Zusammenhang, den $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ aufspannt, in seiner Inzidenzstruktur vollständig erfaßt.

Als die $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ definierende und repräsentierende involutorisch-reziproke Inzidenztafel $\boldsymbol{S}(13/2/4)$, deren sämtliche Elemente die Axiome **A. 1*** und **A. 2*** erfüllen, halten wir die folgende der Abb. 1 fest:

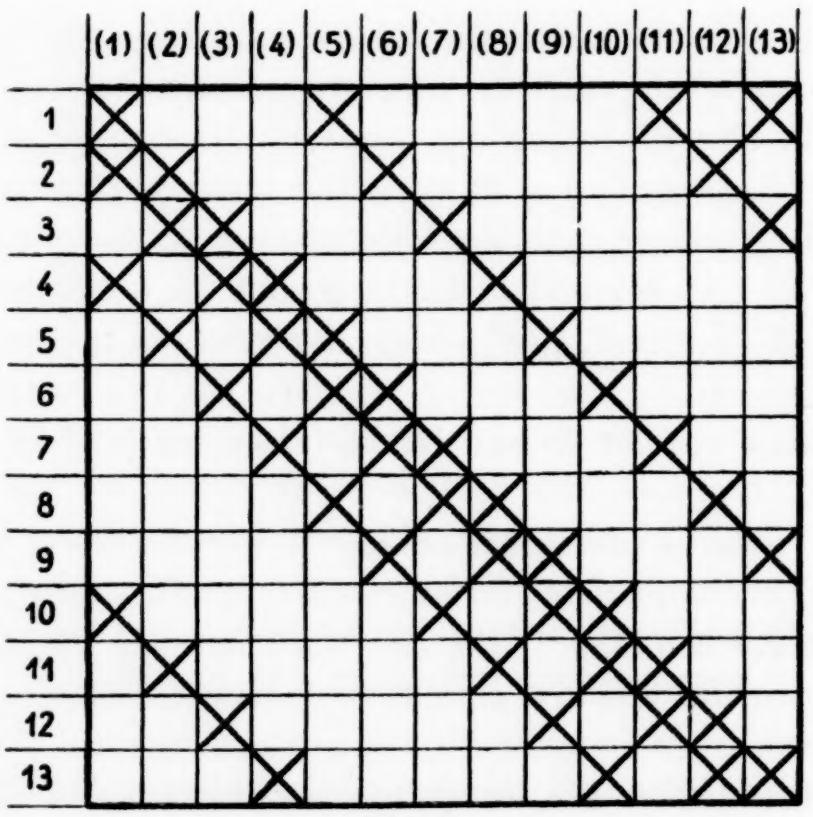

Abb. 1.

[5]) M. Steck, Über finite Geometrien und ihren Zusammenhang mit der Axiomatik der projektiven Geometrie, Deutsche Math. **1** (1936), 578—588.

[6]) M. Steck, Eine vollständige endliche Geometrie des vollständigen Vierecks, Deutsche Math. **1** (1936), 588—592.

§ 6. *Der fixpunktfreie Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(I)}$ *in* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$.

39. Wir halten generell (auch für die folgenden Paragraphen dieser Arbeit) als *Ausgangsviereck* $\{i, j, k, l\}$ der endlichen, reellen Möbiusschen Netzkonstruktion in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ das Viereck der Punkte

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 6$$

fest. Von ihnen liegen keine drei kollinear, wie die aus den Kolonnen (1), (2), (3), (5) der Tafel $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ zu erkennende Krummlage der Punkttripel $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{3, 6, 1\}$, $\{6, 1, 2\}$ zeigt. Als (nichtkollineare (s. Kolonne (4)) Nebenecken dieses Vierecks ergeben sich die Punkte 4, 5, 9, wie die Schnittbildungen

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv (1, 2) \times (3, 6) = 4, \quad \{(1) \text{ und } (3)\}, \\ m_2 &\equiv (1, 6) \times (2, 3) = 5, \quad \{(5) \text{ „ } (2)\}, \\ m_3 &\equiv (1, 3) \times (2, 6) = 9, \quad \{(13) \text{ „ } (6)\} \end{aligned}$$

beweisen. Um das vollständige, reelle, endliche Möbiussche Ausgangsnetz zu erhalten, konstruiere man noch die folgenden Punkte:

$$\begin{aligned} m_4 &\equiv (m_1, m_3) \times (1, 6) = (4, 9) \times (1, 6) = 8, \{(8) \text{ und } (5)\}, \\ m_5 &\equiv (m_1, m_3) \times (2, 3) = (4, 9) \times (2, 3) = 11, \{(8) \text{ „ } (2)\}; \\ m_6 &\equiv (m_2, m_3) \times (1, 2) = (5, 9) \times (1, 2) = 10, \{(9) \text{ „ } (1)\}, \\ m_7 &\equiv (m_2, m_3) \times (3, 6) = (5, 9) \times (3, 6) = 12, \{(9) \text{ „ } (3)\}; \\ m_8 &\equiv (m_1, m_2) \times (2, 6) = (4, 5) \times (2, 6) = 7, \{(4) \text{ „ } (6)\}, \\ m_9 &\equiv (m_1, m_2) \times (1, 3) = (4, 5) \times (1, 3) = 13, \{(4) \text{ „ } (13)\}. \end{aligned}$$

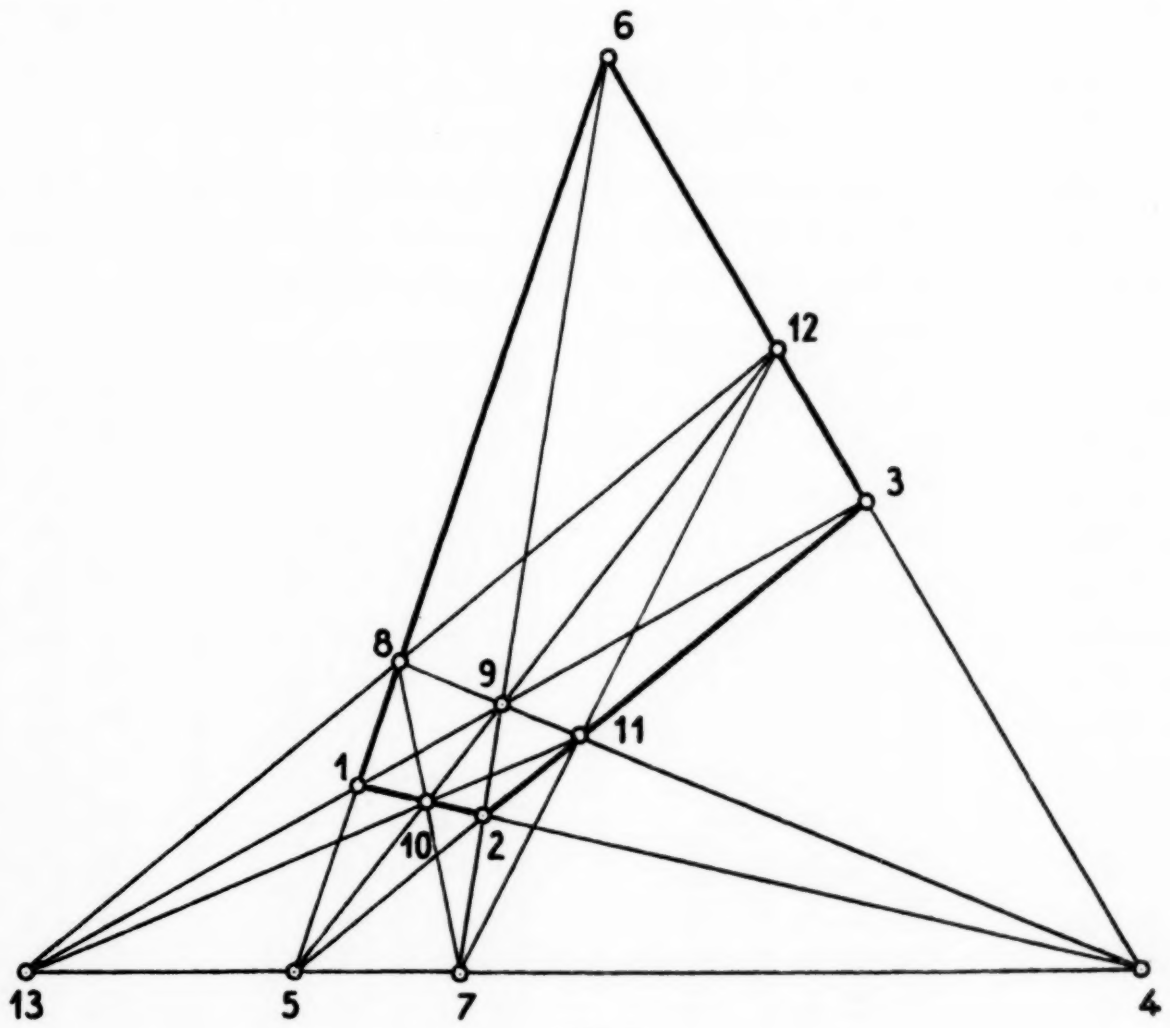

Abb. 2.

Damit sind bereits alle Punkte von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ konstruktiv einmalig erfaßt. Zieht man jetzt noch die Geraden

$$(m_4, m_6, m_8) \equiv (\ 8, 10,\ \ 7) = (\ 7),$$
$$(m_7, m_5, m_8) \equiv (12, 11,\ \ 7) = (11);$$
$$(m_4, m_7, m_9) = (\ 8, 12, 13) = (12),$$
$$(m_5, m_6, m_9) = (11, 10, 13) = (10),$$

so ist damit das *reelle, endliche Möbiussche Ausgangsnetz* bereits vollständig gewonnen (es enthält *alle* Punkte und *alle* Geraden von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ je genau einmal) und in der Abb. 2 in einem Gesamtbild realisiert.

40. Die fixpunktfreie, kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ auf sich werde dann mit Hilfe eines Bildvierecks $\{i', j', k', l'\}$ vorgenommen, indem den Punkten 1, 2, 3, 6 der Reihe nach die Punkte i', j', k', l' als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ zugewiesen werden und damit das (gleichgestaltete) endliche, reelle Möbiussche Bildnetz durch analoge Konstruktionsschritte aufgebaut wird. Dabei müssen folgende weitere Forderungen erfüllt werden:

1) $i' \neq 1, j' \neq 2, k' \neq 3, l' \neq 6$;
2) $\{i', j', k'\}$, $\{j', k', l'\}$, $\{k', l', i'\}$, $\{l', i', j'\}$ sämtlich nicht kollinear;
3) $m_1' \neq 4,\ m_2' \neq 5,\ m_3' \neq 9$;
4) $m_4' \neq 8,\ m_5' \neq 11$;
5) $m_6' \neq 10,\ m_7' \neq 12$;
6) $m_8' \neq 7,\ m_9' \neq 13$.

Dann behaupten wir den folgenden *allgemeinen Existenzsatz*:

Satz 23. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *gibt es genau* 1728 *untereinander und von der Identität* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$ *verschiedene fixpunktfreie Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots, 1728)$, *die explizit angebbar sind.*

Beweis. Aus den obigen sechs Forderungen 1)—6) folgt leicht, daß als Bildvierecke $\{i', j', k', l'\}$ zu $\{1, 2, 3, 6\}$ genau die folgenden 1728 Vierecke in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ in Frage kommen. Es sind dies, wie sich durch systematisches Erfüllen von 1)—6) in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ unmittelbar ergibt, die folgenden:

1. {2, 3, 4, 7}	17. {2, 5, 1, 9}	33. {2, 6, 1, 12}	49. {2, 7, 1, 3}
2. {2, 3, 4, 9}	18. {2, 5, 1, 12}	34. {2, 6, 1, 13}	50. {2, 7, 1, 5}
3. {2, 3, 6, 8}	19. {2, 5, 4, 8}	35. {2, 6, 4, 5}	51. {2, 7, 4, 8}
4. {2, 3, 6, 10}	20. {2, 5, 4, 9}	36. {2, 6, 4, 8}	52. {2, 7, 5, 1}
5. {2, 3, 7, 4}	21. {2, 5, 6, 13}	37. {2, 6, 4, 11}	53. {2, 7, 5, 8}
6. {2, 3, 7, 12}	22. {2, 5, 7, 8}	38. {2, 6, 5, 4}	54. {2, 7, 8, 4}
7. {2, 3, 8, 1}	23. {2, 5, 8, 7}	39. {2, 6, 5, 12}	55. {2, 7, 8, 5}
8. {2, 3, 8, 9}	24. {2, 5, 9, 1}	40. {2, 6, 5, 13}	56. {2, 7, 10, 11}
9. {2, 3, 9, 4}	25. {2, 5, 9, 4}	41. {2, 6, 8, 10}	57. {2, 7, 10, 12}
10. {2, 3, 9, 8}	26. {2, 5, 9, 8}	42. {2, 6, 10, 3}	58. {2, 7, 10, 13}
11. {2, 3, 10, 12}	27. {2, 5, 10, 7}	43. {2, 6, 11, 4}	59. {2, 7, 11, 4}
12. {2, 3, 10, 13}	28. {2, 5, 10, 8}	44. {2, 6, 11, 8}	60. {2, 7, 11, 8}
13. {2, 3, 12, 1}	29. {2, 5, 12, 7}	45. {2, 6, 12, 10}	61. {2, 7, 11, 10}
14. {2, 3, 12, 9}	30. {2, 5, 13, 1}	46. {2, 6, 12, 11}	62. {2, 7, 12, 5}
15. {2, 3, 13, 4}	31. {2, 5, 13, 9}	47. {2, 6, 13, 3}	63. {2, 7, 13, 1}
16. {2, 3, 13, 7}	32. {2, 5, 13, 10}	48. {2, 6, 13, 5}	64. {2, 7, 13, 10}

65. {2, 8, 1, 7}
66. {2, 8, 1, 9}
67. {2, 8, 4, 5}
68. {2, 8, 5, 4}
69. {2, 8, 5, 7}
70. {2, 8, 5, 9}
71. {2, 8, 6, 10}
72. {2, 8, 7, 1}
73. {2, 8, 7, 5}
74. {2, 8, 9, 3}
75. {2, 8, 9, 5}
76. {2, 8, 10, 5}
77. {2, 8, 10, 9}
78. {2, 8, 10, 11}
79. {2, 8, 11, 1}
80. {2, 8, 11, 7}
81. {2, 9, 1, 5}
82. {2, 9, 1, 8}
83. {2, 9, 4, 5}
84. {2, 9, 5, 1}
85. {2, 9, 5, 4}
86. {2, 9, 5, 8}
87. {2, 9, 8, 3}
88. {2, 9, 10, 8}
89. {2, 9, 11, 10}
90. {2, 9, 11, 12}
91. {2, 9, 11, 13}
92. {2, 9, 12, 1}
93. {2, 9, 13, 4}
94. {2, 9, 13, 5}
95. {2, 9, 13, 10}
96. {2, 9, 13, 11}
97. {2, 11, 1, 8}
98. {2, 11, 1, 9}
99. {2, 11, 4, 7}
100. {2, 11, 4, 13}
101. {2, 11, 6, 1}
102. {2, 11, 7, 10}
103. {2, 11, 8, 10}
104. {2, 11, 9, 1}
105. {2, 11, 9, 12}
106. {2, 11, 9, 13}
107. {2, 11, 10, 7}
108. {2, 11, 10, 8}
109. {2, 11, 12, 10}
110. {2, 11, 13, 4}
111. {2, 11, 13, 7}
112. {2, 11, 13, 9}
113. {2, 12, 1, 3}
114. {2, 12, 1, 5}
115. {2, 12, 4, 5}
116. {2, 12, 4, 7}
117. {2, 12, 4, 9}
118. {2, 12, 5, 4}
119. {2, 12, 5, 7}
120. {2, 12, 6, 1}
121. {2, 12, 6, 11}
122. {2, 12, 7, 3}
123. {2, 12, 9, 1}
124. {2, 12, 9, 4}
125. {2, 12, 10, 7}
126. {2, 12, 11, 4}
127. {2, 12, 11, 9}
128. {2, 12, 11, 10}
129. {2, 13, 1, 7}
130. {2, 13, 1, 11}
131. {2, 13, 4, 9}
132. {2, 13, 5, 1}
133. {2, 13, 5, 9}
134. {2, 13, 5, 10}
135. {2, 13, 6, 5}
136. {2, 13, 7, 10}
137. {2, 13, 9, 4}
138. {2, 13, 9, 5}
139. {2, 13, 9, 10}
140. {2, 13, 9, 11}
141. {2, 13, 10, 3}
142. {2, 13, 11, 1}
143. {2, 13, 11, 7}
144. {2, 13, 11, 9}
145. {3, 1, 4, 5}
146. {3, 1, 4, 8}
147. {3, 1, 5, 4}
148. {3, 1, 5, 7}
149. {3, 1, 6, 7}
150. {3, 1, 6, 10}
151. {3, 1, 7, 2}
152. {3, 1, 7, 5}
153. {3, 1, 8, 4}
154. {3, 1, 8, 12}
155. {3, 1, 10, 11}
156. {3, 1, 10, 12}
157. {3, 1, 11, 4}
158. {3, 1, 11, 8}
159. {3, 1, 12, 2}
160. {3, 1, 12, 5}
161. {3, 4, 2, 8}
162. {3, 4, 2, 9}
163. {3, 4, 5, 1}
164. {3, 4, 5, 8}
165. {3, 4, 5, 9}
166. {3, 4, 7, 1}
167. {3, 4, 7, 9}
168. {3, 4, 8, 2}
169. {3, 4, 8, 5}
170. {3, 4, 10, 5}
171. {3, 4, 10, 9}
172. {3, 4, 10, 11}
173. {3, 4, 10, 13}
174. {3, 4, 11, 1}
175. {3, 4, 11, 7}
176. {3, 4, 11, 10}
177. {3, 5, 4, 1}
178. {3, 5, 4, 8}
179. {3, 5, 4, 9}
180. {3, 5, 6, 7}
181. {3, 5, 6, 9}
182. {3, 5, 6, 10}
183. {3, 5, 7, 9}
184. {3, 5, 7, 12}
185. {3, 5, 8, 4}
186. {3, 5, 8, 9}
187. {3, 5, 8, 12}
188. {3, 5, 10, 1}
189. {3, 5, 10, 4}
190. {3, 5, 10, 13}
191. {3, 5, 12, 1}
192. {3, 5, 12, 8}
193. {3, 6, 2, 8}
194. {3, 6, 2, 13}
195. {3, 6, 5, 10}
196. {3, 6, 7, 1}
197. {3, 6, 7, 11}
198. {3, 6, 8, 13}
199. {3, 6, 10, 5}
200. {3, 6, 11, 1}
201. {3, 7, 2, 1}
202. {3, 7, 2, 4}
203. {3, 7, 4, 1}
204. {3, 7, 5, 12}
205. {3, 7, 6, 11}
206. {3, 7, 6, 13}
207. {3, 7, 11, 13}
208. {3, 7, 12, 5}
209. {3, 8, 2, 1}
210. {3, 8, 2, 4}
211. {3, 8, 4, 2}
212. {3, 8, 5, 12}
213. {3, 8, 6, 13}
214. {3, 8, 11, 13}
215. {3, 8, 12, 5}
216. {3, 8, 12, 9}
217. {3, 9, 2, 4}
218. {3, 9, 2, 12}
219. {3, 9, 4, 5}
220. {3, 9, 5, 4}
221. {3, 9, 5, 8}
222. {3, 9, 6, 5}
223. {3, 9, 6, 8}
224. {3, 9, 6, 11}
225. {3, 9, 7, 4}
226. {3, 9, 7, 5}
227. {3, 9, 7, 12}
228. {3, 9, 8, 5}
229. {3, 9, 10, 4}
230. {3, 9, 11, 10}
231. {3, 9, 11, 12}
232. {3, 9, 12, 8}
233. {3, 10, 2, 9}
234. {3, 10, 2, 12}
235. {3, 10, 4, 5}
236. {3, 10, 4, 9}
237. {3, 10, 4, 11}
238. {3, 10, 4, 13}
239. {3, 10, 5, 1}
240. {3, 10, 5, 4}
241. {3, 10, 5, 13}
242. {3, 10, 6, 2}
243. {3, 10, 6, 5}
244. {3, 10, 11, 4}
245. {3, 10, 11, 9}
246. {3, 10, 11, 12}
247. {3, 10, 12, 1}
248. {3, 10, 12, 13}
249. {3, 11, 4, 7}
250. {3, 11, 4, 10}
251. {3, 11, 4, 13}
252. {3, 11, 6, 8}
253. {3, 11, 6, 9}
254. {3, 11, 7, 4}
255. {3, 11, 7, 9}
256. {3, 11, 7, 13}

257. {3, 11, 8, 1}
258. {3, 11, 8, 12}
259. {3, 11, 10, 1}
260. {3, 11, 10, 4}
261. {3, 11, 10, 12}
262. {3, 11, 12, 8}
263. {3, 11, 12, 9}
264. {3, 11, 12, 13}
265. {3, 12, 2, 7}
266. {3, 12, 2, 9}
267. {3, 12, 5, 8}
268. {3, 12, 7, 2}
269. {3, 12, 8, 1}
270. {3, 12, 8, 5}
271. {3, 12, 10, 13}
272. {3, 12, 11, 13}
273. {3, 13, 2, 7}
274. {3, 13, 2, 10}
275. {3, 13, 4, 8}
276. {3, 13, 5, 8}
277. {3, 13, 5, 12}
278. {3, 13, 6, 2}
279. {3, 13, 7, 12}
280. {3, 13, 8, 4}
281. {3, 13, 8, 5}
282. {3, 13, 8, 11}
283. {3, 13, 10, 2}
284. {3, 13, 11, 8}
285. {3, 13, 11, 12}
286. {3, 13, 12, 7}
287. {3, 13, 12, 10}
288. {3, 13, 12, 11}
289. {4, 3, 1, 5}
290. {4, 3, 1, 7}
291. {4, 3, 7, 1}
292. {4, 3, 7, 9}
293. {4, 3, 8, 2}
294. {4, 3, 8, 5}
295. {4, 3, 9, 2}
296. {4, 3, 9, 5}
297. {4, 3, 9, 7}
298. {4, 3, 10, 5}
299. {4, 3, 10, 9}
300. {4, 3, 10, 11}
301. {4, 3, 10, 13}
302. {4, 3, 13, 2}
303. {4, 3, 13, 8}
304. {4, 3, 13, 10}
305. {4, 5, 1, 3}
306. {4, 5, 1, 9}
307. {4, 5, 1, 12}
308. {4, 5, 6, 2}
309. {4, 5, 6, 9}
310. {4, 5, 6, 10}
311. {4, 5, 6, 11}
312. {4, 5, 8, 3}
313. {4, 5, 9, 1}
314. {4, 5, 9, 2}
315. {4, 5, 9, 3}
316. {4, 5, 10, 3}
317. {4, 5, 10, 8}
318. {4, 5, 12, 1}
319. {4, 5, 12, 2}
320. {4, 5, 12, 8}

321. {4, 6, 1, 11}
322. {4, 6, 2, 5}
323. {4, 6, 2, 8}
324. {4, 6, 2, 13}
325. {4, 6, 5, 10}
326. {4, 6, 5, 11}
327. {4, 6, 7, 10}
328. {4, 6, 8, 10}
329. {4, 6, 9, 1}
330. {4, 6, 9, 5}
331. {4, 6, 9, 10}
332. {4, 6, 9, 13}
333. {4, 6, 10, 8}
334. {4, 6, 11, 1}
335. {4, 6, 11, 5}
336. {4, 6, 13, 8}
337. {4, 7, 1, 8}
338. {4, 7, 2, 3}
339. {4, 7, 2, 12}
340. {4, 7, 6, 1}
341. {4, 7, 6, 8}
342. {4, 7, 6, 10}
343. {4, 7, 8, 1}
344. {4, 7, 8, 12}
345. {4, 7, 9, 1}
346. {4, 7, 9, 3}
347. {4, 7, 9, 12}
348. {4, 7, 10, 11}
349. {4, 7, 10, 12}
350. {4, 7, 11, 3}
351. {4, 7, 11, 10}
352. {4, 7, 12, 8}
353. {4, 8, 1, 12}
354. {4, 8, 2, 5}
355. {4, 8, 2, 7}
356. {4, 8, 5, 2}
357. {4, 8, 5, 12}
358. {4, 8, 6, 2}
359. {4, 8, 7, 2}
360. {4, 8, 7, 12}
361. {4, 8, 10, 12}
362. {4, 8, 10, 13}
363. {4, 8, 12, 1}
364. {4, 8, 12, 5}
365. {4, 8, 12, 7}
366. {4, 8, 13, 1}
367. {4, 8, 13, 3}
368. {4, 8, 13, 10}
369. {4, 9, 1, 5}
370. {4, 9, 1, 12}
371. {4, 9, 2, 3}
372. {4, 9, 2, 5}
373. {4, 9, 2, 12}
374. {4, 9, 5, 1}
375. {4, 9, 5, 3}
376. {4, 9, 6, 1}
377. {4, 9, 6, 5}
378. {4, 9, 6, 10}
379. {4, 9, 6, 13}
380. {4, 9, 7, 3}
381. {4, 9, 10, 3}
382. {4, 9, 12, 1}
383. {4, 9, 13, 10}
384. {4, 9, 13, 12}

385. {4, 11, 1, 3}
386. {4, 11, 1, 5}
387. {4, 11, 1, 13}
388. {4, 11, 6, 2}
389. {4, 11, 6, 5}
390. {4, 11, 6, 7}
391. {4, 11, 7, 10}
392. {4, 11, 10, 3}
393. {4, 11, 10, 7}
394. {4, 11, 12, 2}
395. {4, 11, 12, 5}
396. {4, 11, 12, 10}
397. {4, 11, 12, 13}
398. {4, 11, 13, 1}
399. {4, 11, 13, 3}
400. {4, 11, 13, 12}
401. {4, 12, 1, 8}
402. {4, 12, 2, 5}
403. {4, 12, 2, 7}
404. {4, 12, 2, 9}
405. {4, 12, 5, 2}
406. {4, 12, 5, 8}
407. {4, 12, 7, 8}
408. {4, 12, 8, 7}
409. {4, 12, 9, 2}
410. {4, 12, 10, 8}
411. {4, 12, 11, 2}
412. {4, 12, 11, 13}
413. {4, 12, 13, 1}
414. {4, 12, 13, 9}
415. {4, 12, 13, 10}
416. {4, 12, 13, 11}
417. {4, 13, 1, 8}
418. {4, 13, 1, 12}
419. {4, 13, 2, 3}
420. {4, 13, 2, 9}
421. {4, 13, 2, 11}
422. {4, 13, 6, 8}
423. {4, 13, 8, 10}
424. {4, 13, 9, 2}
425. {4, 13, 9, 12}
426. {4, 13, 10, 8}
427. {4, 13, 11, 2}
428. {4, 13, 11, 12}
429. {4, 13, 12, 1}
430. {4, 13, 12, 9}
431. {4, 13, 12, 10}
432. {4, 13, 12, 11}
433. {5, 1, 2, 7}
434. {5, 1, 2, 9}
435. {5, 1, 4, 9}
436. {5, 1, 7, 3}
437. {5, 1, 9, 2}
438. {5, 1, 9, 4}
439. {5, 1, 9, 7}
440. {5, 1, 10, 7}
441. {5, 1, 11, 4}
442. {5, 1, 11, 9}
443. {5, 1, 11, 10}
444. {5, 1, 11, 13}
445. {5, 1, 12, 2}
446. {5, 1, 13, 10}
447. {5, 1, 13, 11}
448. {5, 1, 13, 12}

449. {5, 3, 1, 4}
450. {5, 3, 1, 12}
451. {5, 3, 4, 9}
452. {5, 3, 6, 7}
453. {5, 3, 6, 9}
454. {5, 3, 6, 13}
455. {5, 3, 7, 9}
456. {5, 3, 8, 4}
457. {5, 3, 8, 9}
458. {5, 3, 8, 12}
459. {5, 3, 9, 4}
460. {5, 3, 9, 7}
461. {5, 3, 10, 4}
462. {5, 3, 12, 7}
463. {5, 3, 13, 10}
464. {5, 6, 13, 12}
465. {5, 4, 1, 3}
466. {5, 4, 1, 9}
467. {5, 4, 1, 12}
468. {5, 4, 2, 9}
469. {5, 4, 2, 12}
470. {5, 4, 6, 2}
471. {5, 4, 6, 9}
472. {5, 4, 6, 10}
473. {5, 4, 6, 11}
474. {5, 4, 8, 3}
475. {5, 4, 9, 2}
476. {5, 4, 9, 3}
477. {5, 4, 10, 3}
478. {5, 4, 11, 10}
479. {5, 4, 11, 12}
480. {5, 4, 12, 2}
481. {5, 6, 2, 4}
482. {5, 6, 2, 10}
483. {5, 6, 2, 12}
484. {5, 6, 4, 10}
485. {5, 6, 4, 11}
486. {5, 6, 7, 10}
487. {5, 6, 9, 3}
488. {5, 6, 9, 4}
489. {5, 6, 9, 11}
490. {5, 6, 9, 13}
491. {5, 6, 10, 3}
492. {5, 6, 11, 4}
493. {5, 6, 11, 12}
494. {5, 6, 12, 11}
495. {5, 6, 12, 13}
496. {5, 6, 13, 3}
497. {5, 7, 1, 3}
498. {5, 7, 2, 12}
499. {5, 7, 6, 10}
500. {5, 7, 6, 11}
501. {5, 7, 8, 12}
502. {5, 7, 9, 3}
503. {5, 7, 10, 11}
504. {5, 7, 11, 10}
505. {5, 8, 2, 4}
506. {5, 8, 2, 7}
507. {5, 8, 2, 9}
508. {5, 8, 4, 2}
509. {5, 8, 7, 2}
510. {5, 8, 7, 12}
511. {5, 8, 9, 2}
512. {5, 8, 10, 2}

513. {5, 8, 10, 13}
514. {5, 8, 11, 12}
515. {5, 8, 11, 13}
516. {5, 8, 12, 7}
517. {5, 8, 13, 3}
518. {5, 8, 13, 9}
519. {5, 8, 13, 10}
520. {5, 8, 13, 11}
521. {5, 9, 1, 4}
522. {5, 9, 2, 4}
523. {5, 9, 6, 11}
524. {5, 9, 6, 13}
525. {5, 9, 7, 3}
526. {5, 9, 8, 3}
527. {5, 9, 11, 13}
528. {5, 9, 13, 11}
529. {5, 10, 1, 7}
530. {5, 10, 1, 11}
531. {5, 10, 1, 13}
532. {5, 10, 2, 7}
533. {5, 10, 2, 13}
534. {5, 10, 4, 11}
535. {5, 10, 6, 2}
536. {5, 10, 7, 11}
537. {5, 10, 8, 2}
538. {5, 10, 8, 4}
539. {5, 10, 8, 11}
540. {5, 10, 8, 13}
541. {5, 10, 11, 4}
542. {5, 10, 11, 7}
543. {5, 10, 13, 2}
544. {5, 10, 13, 3}
545. {5, 11, 1, 4}
546. {5, 11, 1, 9}
547. {5, 11, 1, 10}
548. {5, 11, 1, 13}
549. {5, 11, 4, 10}
550. {5, 11, 6, 7}
551. {5, 11, 6, 9}
552. {5, 11, 7, 10}
553. {5, 11, 8, 7}
554. {5, 11, 8, 10}
555. {5, 11, 9, 7}
556. {5, 11, 9, 13}
557. {5, 11, 10, 7}
558. {5, 11, 12, 13}
559. {5, 11, 13, 9}
560. {5, 11, 13, 12}
561. {5, 12, 1, 2}
562. {5, 12, 2, 4}
563. {5, 12, 4, 2}
564. {5, 12, 6, 13}
565. {5, 12, 8, 3}
566. {5, 12, 8, 7}
567. {5, 12, 11, 13}
568. {5, 12, 13, 11}
569. {5, 13, 1, 12}
570. {5, 13, 2, 9}
571. {5, 13, 6, 2}
572. {5, 13, 8, 3}
573. {5, 13, 8, 10}
574. {5, 13, 9, 2}
575. {5, 13, 11, 12}
576. {5, 13, 12, 11}

577. {6, 1, 2, 11}
578. {6, 1, 2, 12}
579. {6, 1, 4, 7}
580. {6, 1, 4, 9}
581. {6, 1, 4, 13}
582. {6, 1, 7, 10}
583. {6, 1, 9, 4}
584. {6, 1, 9, 11}
585. {6, 1, 9, 12}
586. {6, 1, 10, 3}
587. {6, 1, 11, 3}
588. {6, 1, 11, 9}
589. {6, 1, 12, 10}
590. {6, 1, 12, 13}
591. {6, 1, 13, 4}
592. {6, 1, 13, 7}
593. {6, 3, 1, 7}
594. {6, 3, 1, 11}
595. {6, 3, 7, 11}
596. {6, 3, 8, 2}
597. {6, 3, 8, 13}
598. {6, 3, 9, 10}
599. {6, 3, 10, 9}
600. {6, 3, 13, 2}
601. {6, 4, 1, 7}
602. {6, 4, 1, 9}
603. {6, 4, 1, 11}
604. {6, 4, 2, 13}
605. {6, 4, 5, 2}
606. {6, 4, 5, 9}
607. {6, 4, 5, 10}
608. {6, 4, 5, 11}
609. {6, 4, 7, 10}
610. {6, 4, 8, 10}
611. {6, 4, 9, 10}
612. {6, 4, 9, 13}
613. {6, 4, 10, 7}
614. {6, 4, 11, 7}
615. {6, 4, 13, 2}
616. {6, 4, 13, 9}
617. {6, 5, 4, 2}
618. {6, 5, 4, 9}
619. {6, 5, 4, 10}
620. {6, 5, 4, 11}
621. {6, 5, 7, 3}
622. {6, 5, 9, 3}
623. {6, 5, 9, 4}
624. {6, 5, 9, 11}
625. {6, 5, 9, 13}
626. {6, 5, 10, 7}
627. {6, 5, 12, 2}
628. {6, 5, 12, 7}
629. {6, 5, 12, 11}
630. {6, 5, 13, 3}
631. {6, 5, 13, 9}
632. {6, 5, 13, 12}
633. {6, 7, 1, 10}
634. {6, 7, 1, 13}
635. {6, 7, 4, 10}
636. {6, 7, 4, 11}
637. {6, 7, 5, 3}
638. {6, 7, 5, 11}
639. {6, 7, 5, 12}
640. {6, 7, 8, 4}

257. {3, 11, 8, 1}
258. {3, 11, 8, 12}
259. {3, 11, 10, 1}
260. {3, 11, 10, 4}
261. {3, 11, 10, 12}
262. {3, 11, 12, 8}
263. {3, 11, 12, 9}
264. {3, 11, 12, 13}
265. {3, 12, 2, 7}
266. {3, 12, 2, 9}
267. {3, 12, 5, 8}
268. {3, 12, 7, 2}
269. {3, 12, 8, 1}
270. {3, 12, 8, 5}
271. {3, 12, 10, 13}
272. {3, 12, 11, 13}
273. {3, 13, 2, 7}
274. {3, 13, 2, 10}
275. {3, 13, 4, 8}
276. {3, 13, 5, 8}
277. {3, 13, 5, 12}
278. {3, 13, 6, 2}
279. {3, 13, 7, 12}
280. {3, 13, 8, 4}
281. {3, 13, 8, 5}
282. {3, 13, 8, 11}
283. {3, 13, 10, 2}
284. {3, 13, 11, 8}
285. {3, 13, 11, 12}
286. {3, 13, 12, 7}
287. {3, 13, 12, 10}
288. {3, 13, 12, 11}
289. {4, 3, 1, 5}
290. {4, 3, 1, 7}
291. {4, 3, 7, 1}
292. {4, 3, 7, 9}
293. {4, 3, 8, 2}
294. {4, 3, 8, 5}
295. {4, 3, 9, 2}
296. {4, 3, 9, 5}
297. {4, 3, 9, 7}
298. {4, 3, 10, 5}
299. {4, 3, 10, 9}
300. {4, 3, 10, 11}
301. {4, 3, 10, 13}
302. {4, 3, 13, 2}
303. {4, 3, 13, 8}
304. {4, 3, 13, 10}
305. {4, 5, 1, 3}
306. {4, 5, 1, 9}
307. {4, 5, 1, 12}
308. {4, 5, 6, 2}
309. {4, 5, 6, 9}
310. {4, 5, 6, 10}
311. {4, 5, 6, 11}
312. {4, 5, 8, 3}
313. {4, 5, 9, 1}
314. {4, 5, 9, 2}
315. {4, 5, 9, 3}
316. {4, 5, 10, 3}
317. {4, 5, 10, 8}
318. {4, 5, 12, 1}
319. {4, 5, 12, 2}
320. {4, 5, 12, 8}

321. {4, 6, 1, 11}
322. {4, 6, 2, 5}
323. {4, 6, 2, 8}
324. {4, 6, 2, 13}
325. {4, 6, 5, 10}
326. {4, 6, 5, 11}
327. {4, 6, 7, 10}
328. {4, 6, 8, 10}
329. {4, 6, 9, 1}
330. {4, 6, 9, 5}
331. {4, 6, 9, 10}
332. {4, 6, 9, 13}
333. {4, 6, 10, 8}
334. {4, 6, 11, 1}
335. {4, 6, 11, 5}
336. {4, 6, 13, 8}
337. {4, 7, 1, 8}
338. {4, 7, 2, 3}
339. {4, 7, 2, 12}
340. {4, 7, 6, 1}
341. {4, 7, 6, 8}
342. {4, 7, 6, 10}
343. {4, 7, 8, 1}
344. {4, 7, 8, 12}
345. {4, 7, 9, 1}
346. {4, 7, 9, 3}
347. {4, 7, 9, 12}
348. {4, 7, 10, 11}
349. {4, 7, 10, 12}
350. {4, 7, 11, 3}
351. {4, 7, 11, 10}
352. {4, 7, 12, 8}
353. {4, 8, 1, 12}
354. {4, 8, 2, 5}
355. {4, 8, 2, 7}
356. {4, 8, 5, 2}
357. {4, 8, 5, 12}
358. {4, 8, 6, 2}
359. {4, 8, 7, 2}
360. {4, 8, 7, 12}
361. {4, 8, 10, 12}
362. {4, 8, 10, 13}
363. {4, 8, 12, 1}
364. {4, 8, 12, 5}
365. {4, 8, 12, 7}
366. {4, 8, 13, 1}
367. {4, 8, 13, 3}
368. {4, 8, 13, 10}
369. {4, 9, 1, 5}
370. {4, 9, 1, 12}
371. {4, 9, 2, 3}
372. {4, 9, 2, 5}
373. {4, 9, 2, 12}
374. {4, 9, 5, 1}
375. {4, 9, 5, 3}
376. {4, 9, 6, 1}
377. {4, 9, 6, 5}
378. {4, 9, 6, 10}
379. {4, 9, 6, 13}
380. {4, 9, 7, 3}
381. {4, 9, 10, 3}
382. {4, 9, 12, 1}
383. {4, 9, 13, 10}
384. {4, 9, 13, 12}

385. {4, 11, 1, 3}
386. {4, 11, 1, 5}
387. {4, 11, 1, 13}
388. {4, 11, 6, 2}
389. {4, 11, 6, 5}
390. {4, 11, 6, 7}
391. {4, 11, 7, 10}
392. {4, 11, 10, 3}
393. {4, 11, 10, 7}
394. {4, 11, 12, 2}
395. {4, 11, 12, 5}
396. {4, 11, 12, 10}
397. {4, 11, 12, 13}
398. {4, 11, 13, 1}
399. {4, 11, 13, 3}
400. {4, 11, 13, 12}
401. {4, 12, 1, 8}
402. {4, 12, 2, 5}
403. {4, 12, 2, 7}
404. {4, 12, 2, 9}
405. {4, 12, 5, 2}
406. {4, 12, 5, 8}
407. {4, 12, 7, 8}
408. {4, 12, 8, 7}
409. {4, 12, 9, 2}
410. {4, 12, 10, 8}
411. {4, 12, 11, 2}
412. {4, 12, 11, 13}
413. {4, 12, 13, 1}
414. {4, 12, 13, 9}
415. {4, 12, 13, 10}
416. {4, 12, 13, 11}
417. {4, 13, 1, 8}
418. {4, 13, 1, 12}
419. {4, 13, 2, 3}
420. {4, 13, 2, 9}
421. {4, 13, 2, 11}
422. {4, 13, 6, 8}
423. {4, 13, 8, 10}
424. {4, 13, 9, 2}
425. {4, 13, 9, 12}
426. {4, 13, 10, 8}
427. {4, 13, 11, 2}
428. {4, 13, 11, 12}
429. {4, 13, 12, 1}
430. {4, 13, 12, 9}
431. {4, 13, 12, 10}
432. {4, 13, 12, 11}
433. {5, 1, 2, 7}
434. {5, 1, 2, 9}
435. {5, 1, 4, 9}
436. {5, 1, 7, 3}
437. {5, 1, 9, 2}
438. {5, 1, 9, 4}
439. {5, 1, 9, 7}
440. {5, 1, 10, 7}
441. {5, 1, 11, 4}
442. {5, 1, 11, 9}
443. {5, 1, 11, 10}
444. {5, 1, 11, 13}
445. {5, 1, 12, 2}
446. {5, 1, 13, 10}
447. {5, 1, 13, 11}
448. {5, 1, 13, 12}

449. {5, 3, 1, 4}
450. {5, 3, 1, 12}
451. {5, 3, 4, 9}
452. {5, 3, 6, 7}
453. {5, 3, 6, 9}
454. {5, 3, 6, 13}
455. {5, 3, 7, 9}
456. {5, 3, 8, 4}
457. {5, 3, 8, 9}
458. {5, 3, 8, 12}
459. {5, 3, 9, 4}
460. {5, 3, 9, 7}
461. {5, 3, 10, 4}
462. {5, 3, 12, 7}
463. {5, 3, 13, 10}
464. {5, 6, 13, 12}
465. {5, 4, 1, 3}
466. {5, 4, 1, 9}
467. {5, 4, 1, 12}
468. {5, 4, 2, 9}
469. {5, 4, 2, 12}
470. {5, 4, 6, 2}
471. {5, 4, 6, 9}
472. {5, 4, 6, 10}
473. {5, 4, 6, 11}
474. {5, 4, 8, 3}
475. {5, 4, 9, 2}
476. {5, 4, 9, 3}
477. {5, 4, 10, 3}
478. {5, 4, 11, 10}
479. {5, 4, 11, 12}
480. {5, 4, 12, 2}
481. {5, 6, 2, 4}
482. {5, 6, 2, 10}
483. {5, 6, 2, 12}
484. {5, 6, 4, 10}
485. {5, 6, 4, 11}
486. {5, 6, 7, 10}
487. {5, 6, 9, 3}
488. {5, 6, 9, 4}
489. {5, 6, 9, 11}
490. {5, 6, 9, 13}
491. {5, 6, 10, 3}
492. {5, 6, 11, 4}
493. {5, 6, 11, 12}
494. {5, 6, 12, 11}
495. {5, 6, 12, 13}
496. {5, 6, 13, 3}
497. {5, 7, 1, 3}
498. {5, 7, 2, 12}
499. {5, 7, 6, 10}
500. {5, 7, 6, 11}
501. {5, 7, 8, 12}
502. {5, 7, 9, 3}
503. {5, 7, 10, 11}
504. {5, 7, 11, 10}
505. {5, 8, 2, 4}
506. {5, 8, 2, 7}
507. {5, 8, 2, 9}
508. {5, 8, 4, 2}
509. {5, 8, 7, 2}
510. {5, 8, 7, 12}
511. {5, 8, 9, 2}
512. {5, 8, 10, 2}

513. {5, 8, 10, 13}
514. {5, 8, 11, 12}
515. {5, 8, 11, 13}
516. {5, 8, 12, 7}
517. {5, 8, 13, 3}
518. {5, 8, 13, 9}
519. {5, 8, 13, 10}
520. {5, 8, 13, 11}
521. {5, 9, 1, 4}
522. {5, 9, 2, 4}
523. {5, 9, 6, 11}
524. {5, 9, 6, 13}
525. {5, 9, 7, 3}
526. {5, 9, 8, 3}
527. {5, 9, 11, 13}
528. {5, 9, 13, 11}
529. {5, 10, 1, 7}
530. {5, 10, 1, 11}
531. {5, 10, 1, 13}
532. {5, 10, 2, 7}
533. {5, 10, 2, 13}
534. {5, 10, 4, 11}
535. {5, 10, 6, 2}
536. {5, 10, 7, 11}
537. {5, 10, 8, 2}
538. {5, 10, 8, 4}
539. {5, 10, 8, 11}
540. {5, 10, 8, 13}
541. {5, 10, 11, 4}
542. {5, 10, 11, 7}
543. {5, 10, 13, 2}
544. {5, 10, 13, 3}
545. {5, 11, 1, 4}
546. {5, 11, 1, 9}
547. {5, 11, 1, 10}
548. {5, 11, 1, 13}
549. {5, 11, 4, 10}
550. {5, 11, 6, 7}
551. {5, 11, 6, 9}
552. {5, 11, 7, 10}
553. {5, 11, 8, 7}
554. {5, 11, 8, 10}
555. {5, 11, 9, 7}
556. {5, 11, 9, 13}
557. {5, 11, 10, 7}
558. {5, 11, 12, 13}
559. {5, 11, 13, 9}
560. {5, 11, 13, 12}
561. {5, 12, 1, 2}
562. {5, 12, 2, 4}
563. {5, 12, 4, 2}
564. {5, 12, 6, 13}
565. {5, 12, 8, 3}
566. {5, 12, 8, 7}
567. {5, 12, 11, 13}
568. {5, 12, 13, 11}
569. {5, 13, 1, 12}
570. {5, 13, 2, 9}
571. {5, 13, 6, 2}
572. {5, 13, 8, 3}
573. {5, 13, 8, 10}
574. {5, 13, 9, 2}
575. {5, 13, 11, 12}
576. {5, 13, 12, 11}

577. {6, 1, 2, 11}
578. {6, 1, 2, 12}
579. {6, 1, 4, 7}
580. {6, 1, 4, 9}
581. {6, 1, 4, 13}
582. {6, 1, 7, 10}
583. {6, 1, 9, 4}
584. {6, 1, 9, 11}
585. {6, 1, 9, 12}
586. {6, 1, 10, 3}
587. {6, 1, 11, 3}
588. {6, 1, 11, 9}
589. {6, 1, 12, 10}
590. {6, 1, 12, 13}
591. {6, 1, 13, 4}
592. {6, 1, 13, 7}
593. {6, 3, 1, 7}
594. {6, 3, 1, 11}
595. {6, 3, 7, 11}
596. {6, 3, 8, 2}
597. {6, 3, 8, 13}
598. {6, 3, 9, 10}
599. {6, 3, 10, 9}
600. {6, 3, 13, 2}
601. {6, 4, 1, 7}
602. {6, 4, 1, 9}
603. {6, 4, 1, 11}
604. {6, 4, 2, 13}
605. {6, 4, 5, 2}
606. {6, 4, 5, 9}
607. {6, 4, 5, 10}
608. {6, 4, 5, 11}
609. {6, 4, 7, 10}
610. {6, 4, 8, 10}
611. {6, 4, 9, 10}
612. {6, 4, 9, 13}
613. {6, 4, 10, 7}
614. {6, 4, 11, 7}
615. {6, 4, 13, 2}
616. {6, 4, 13, 9}
617. {6, 5, 4, 2}
618. {6, 5, 4, 9}
619. {6, 5, 4, 10}
620. {6, 5, 4, 11}
621. {6, 5, 7, 3}
622. {6, 5, 9, 3}
623. {6, 5, 9, 4}
624. {6, 5, 9, 11}
625. {6, 5, 9, 13}
626. {6, 5, 10, 7}
627. {6, 5, 12, 2}
628. {6, 5, 12, 7}
629. {6, 5, 12, 11}
630. {6, 5, 13, 3}
631. {6, 5, 13, 9}
632. {6, 5, 13, 12}
633. {6, 7, 1, 10}
634. {6, 7, 1, 13}
635. {6, 7, 4, 10}
636. {6, 7, 4, 11}
637. {6, 7, 5, 3}
638. {6, 7, 5, 11}
639. {6, 7, 5, 12}
640. {6, 7, 8, 4}

641. {6, 7, 8, 11}
642. {6, 7, 8, 12}
643. {6, 7, 10, 4}
644. {6, 7, 11, 4}
645. {6, 7, 12, 10}
646. {6, 7, 12, 13}
647. {6, 7, 13, 3}
648. {6, 7, 13, 12}
649. {6, 8, 2, 3}
650. {6, 8, 2, 10}
651. {6, 8, 4, 13}
652. {6, 8, 7, 12}
653. {6, 8, 7, 13}
654. {6, 8, 9, 13}
655. {6, 8, 10, 2}
656. {6, 8, 10, 12}
657. {6, 8, 11, 2}
658. {6, 8, 11, 12}
659. {6, 8, 12, 7}
660. {6, 8, 12, 9}
661. {6, 8, 12, 11}
662. {6, 8, 13, 4}
663. {6, 8, 13, 7}
664. {6, 8, 13, 9}
665. {6, 9, 1, 4}
666. {6, 9, 1, 10}
667. {6, 9, 1, 12}
668. {6, 9, 4, 10}
669. {6, 9, 4, 13}
670. {6, 9, 5, 3}
671. {6, 9, 5, 4}
672. {6, 9, 5, 11}
673. {6, 9, 5, 13}
674. {6, 9, 8, 10}
675. {6, 9, 10, 3}
676. {6, 9, 11, 3}
677. {6, 9, 12, 11}
678. {6, 9, 12, 13}
679. {6, 9, 13, 4}
680. {6, 9, 13, 12}
681. {6, 10, 1, 9}
682. {6, 10, 1, 12}
683. {6, 10, 2, 3}
684. {6, 10, 4, 7}
685. {6, 10, 4, 9}
686. {6, 10, 5, 2}
687. {6, 10, 5, 4}
688. {6, 10, 5, 7}
689. {6, 10, 7, 4}
690. {6, 10, 8, 4}
691. {6, 10, 8, 9}
692. {6, 10, 8, 12}
693. {6, 10, 9, 3}
694. {6, 10, 9, 4}
695. {6, 10, 12, 2}
696. {6, 10, 12, 7}
697. {6, 11, 1, 2}
698. {6, 11, 1, 4}
699. {6, 11, 4, 2}
700. {6, 11, 7, 3}
701. {6, 11, 8, 3}
702. {6, 11, 8, 7}
703. {6, 11, 9, 12}
704. {6, 11, 12, 9}
705. {6, 12, 1, 13}
706. {6, 12, 2, 11}
707. {6, 12, 5, 2}
708. {6, 12, 8, 7}
709. {6, 12, 8, 10}
710. {6, 12, 9, 13}
711. {6, 12, 11, 2}
712. {6, 12, 13, 9}
713. {6, 13, 1, 2}
714. {6, 13, 2, 4}
715. {6, 13, 4, 2}
716. {6, 13, 5, 12}
717. {6, 13, 8, 3}
718. {6, 13, 8, 7}
719. {6, 13, 9, 12}
720. {6, 13, 12, 9}
721. {7, 1, 2, 5}
722. {7, 1, 2, 8}
723. {7, 1, 4, 9}
724. {7, 1, 5, 3}
725. {7, 1, 5, 9}
726. {7, 1, 6, 10}
727. {7, 1, 8, 2}
728. {7, 1, 8, 9}
729. {7, 1, 9, 4}
730. {7, 1, 9, 5}
731. {7, 1, 9, 8}
732. {7, 1, 10, 5}
733. {7, 1, 10, 9}
734. {7, 1, 10, 13}
735. {7, 1, 13, 2}
736. {7, 1, 13, 8}
737. {7, 3, 1, 2}
738. {7, 3, 1, 4}
739. {7, 3, 4, 1}
740. {7, 3, 6, 11}
741. {7, 3, 9, 12}
742. {7, 3, 12, 5}
743. {7, 3, 12, 9}
744. {7, 3, 13, 11}
745. {7, 4, 1, 8}
746. {7, 4, 1, 9}
747. {7, 4, 2, 12}
748. {7, 4, 6, 1}
749. {7, 4, 8, 1}
750. {7, 4, 8, 12}
751. {7, 4, 9, 1}
752. {7, 4, 9, 12}
753. {7, 4, 10, 11}
754. {7, 4, 10, 12}
755. {7, 4, 11, 2}
756. {7, 4, 11, 3}
757. {7, 4, 11, 10}
758. {7, 4, 12, 2}
759. {7, 4, 12, 8}
760. {7, 4, 12, 9}
761. {7, 5, 1, 3}
762. {7, 5, 1, 9}
763. {7, 5, 6, 11}
764. {7, 5, 8, 12}
765. {7, 5, 9, 1}
766. {7, 5, 10, 11}
767. {7, 5, 12, 2}
768. {7, 5, 12, 8}
769. {7, 6, 1, 3}
770. {7, 6, 1, 10}
771. {7, 6, 4, 11}
772. {7, 6, 5, 11}
773. {7, 6, 8, 11}
774. {7, 6, 8, 12}
775. {7, 6, 10, 1}
776. {7, 6, 10, 12}
777. {7, 6, 11, 4}
778. {7, 6, 11, 5}
779. {7, 6, 11, 8}
780. {7, 6, 12, 5}
781. {7, 6, 12, 8}
782. {7, 6, 12, 13}
783. {7, 6, 13, 1}
784. {7, 6, 13, 12}
785. {7, 8, 1, 2}
786. {7, 8, 2, 1}
787. {7, 8, 5, 12}
788. {7, 8, 9, 12}
789. {7, 8, 11, 13}
790. {7, 8, 12, 5}
791. {7, 8, 12, 9}
792. {7, 8, 13, 11}
793. {7, 9, 1, 4}
794. {7, 9, 1, 5}
795. {7, 9, 1, 8}
796. {7, 9, 4, 1}
797. {7, 9, 5, 1}
798. {7, 9, 8, 1}
799. {7, 9, 8, 12}
800. {7, 9, 10, 1}
801. {7, 9, 10, 11}
802. {7, 9, 11, 3}
803. {7, 9, 11, 5}
804. {7, 9, 11, 10}
805. {7, 9, 11, 13}
806. {7, 9, 12, 8}
807. {7, 9, 13, 11}
808. {7, 9, 13, 12}
809. {7, 10, 1, 5}
810. {7, 10, 1, 9}
811. {7, 10, 1, 13}
812. {7, 10, 2, 11}
813. {7, 10, 4, 11}
814. {7, 10, 5, 11}
815. {7, 10, 6, 1}
816. {7, 10, 9, 1}
817. {7, 10, 9, 11}
818. {7, 10, 11, 2}
819. {7, 10, 11, 4}
820. {7, 10, 11, 5}
821. {7, 10, 11, 9}
822. {7, 10, 12, 2}
823. {7, 10, 13, 1}
824. {7, 10, 13, 12}
825. {7, 11, 4, 10}
826. {7, 11, 6, 5}
827. {7, 11, 8, 2}
828. {7, 11, 8, 5}
829. {7, 11, 8, 13}
830. {7, 11, 9, 3}
831. {7, 11, 9, 5}
832. {7, 11, 9, 10}

833. {7, 11, 9, 13}
834. {7, 11, 10, 2}
835. {7, 11, 10, 4}
836. {7, 11, 10, 5}
837. {7, 11, 10, 9}
838. {7, 11, 13, 2}
839. {7, 11, 13, 8}
840. {7. 11, 13, 9}
841. {7, 12, 2, 3}
842. {7, 12, 2, 4}
843. {7, 12, 4, 2}
844. {7, 12, 4, 8}
845. {7, 12, 5, 2}
846. {7, 12, 5, 8}
847. {7, 12, 6, 8}
848. {7, 12, 6, 13}
849. {7, 12, 8, 4}
850. {7, 12, 8, 5}
851. {7, 12, 8, 9}
852. {7, 12, 9, 8}
853. {7, 12, 10, 2}
854. {7, 12, 13, 3}
855. {7, 12, 13, 9}
856. {7, 12, 13, 10}
857. {7, 13, 1, 8}
858. {7, 13, 2, 11}
859. {7, 13, 8, 1}
860. {7, 13, 9, 12}
861. {7, 13, 10, 12}
862. {7, 13, 11, 2}
863. {7, 13, 12, 9}
864. {7, 13, 12, 10}
865. {8, 1, 2, 3}
866. {8, 1, 2, 9}
867. {8, 1, 4, 7}
868. {8, 1, 7, 4}
869. {8, 1, 7, 9}
870. {8, 1, 9, 2}
871. {8, 1, 9, 7}
872. {8, 1, 10, 11}
873. {8, 1, 10, 12}
874. {8, 1, 10, 13}
875. {8, 1, 11, 2}
876. {8, 1, 11, 10}
877. {8, 1, 12, 9}
878. {8, 1, 13, 4}
879. {8, 1, 13, 7}
880. {8, 1, 13, 10}
881. {8, 3, 1, 2}
882. {8, 3, 1, 4}
883. {8, 3, 4, 2}
884. {8, 3, 6, 11}
885. {8, 3, 6, 13}
886. {8, 3, 9, 12}
887. {8, 3, 12, 9}
888. {8, 3, 13, 11}
889. {8, 4, 1, 3}
890. {8, 4, 1, 12}
891. {8, 4, 2, 7}
892. {8, 4, 5, 2}
893. {8, 4, 5, 3}
894. {8, 4, 5, 12}
895. {8, 4, 6, 2}
896. {8, 4, 6, 7}

897. {8, 4, 6, 10}
898. {8, 4, 7, 2}
899. {8, 4, 7, 12}
900. {8, 4, 10, 12}
901. {8, 4, 10, 13}
902. {8, 4, 12, 7}
903. {8, 4, 13, 3}
904. {8, 4, 13, 10}
905. {8, 5, 4, 2}
906. {8, 5, 7, 2}
907. {8, 5, 7, 9}
908. {8, 5, 7, 12}
909. {8, 5, 9, 2}
910. {8, 5, 9, 3}
911. {8, 5, 9, 7}
912. {8, 5, 10, 2}
913. {8, 5, 10, 4}
914. {8, 5, 10, 11}
915. {8, 5, 10, 13}
916. {8, 5, 12, 7}
917. {8, 5, 13, 3}
918. {8, 5, 13, 9}
919. {8, 5, 13, 10}
920. {8, 5, 13, 11}
921. {8, 6, 2, 10}
922. {8, 6, 2, 11}
923. {8, 6, 4, 10}
924. {8, 6, 4, 13}
925. {8, 6, 7, 4}
926. {8, 6, 7, 12}
927. {8, 6, 7, 13}
928. {8, 6, 9, 3}
929. {8, 6, 9, 12}
930. {8, 6, 9, 13}
931. {8, 6, 10, 4}
932. {8, 6, 11, 3
933. {8, 6, 11, 12}
934. {8, 6, 12, 10}
935. {8, 6, 12, 11}
936. {8, 6, 13, 4}
937. {8, 7, 1, 4}
938. {8, 7, 2, 4}
939. {8, 7, 5, 12}
940. {8, 7, 6, 11}
941. {8, 7, 6, 13}
942. {8, 7, 9, 12}
943. {8, 7, 11, 13}
944. {8, 7, 13, 11}
945. {8, 9, 1, 12}
946. {8, 9, 2, 3}
947. {8, 9, 5, 3}
948. {8, 9, 6, 10}
949. {8, 9, 6, 13}
950. {8, 9, 7, 12}
951. {8, 9, 10, 13}
952. {8, 9, 13, 10}
953. {8, 10, 1, 9}
954. {8, 10, 1, 12}
955. {8, 10, 1, 13}
956. {8, 10, 2, 11}
957. {8, 10, 4, 13}
958. {8, 10, 5, 2}
959. {8, 10, 5, 4}
960. {8, 10, 5, 11}

961. {8, 10, 5, 13}
962. {8, 10, 6, 9}
963. {8, 10, 9, 2}
964. {8, 10, 9, 13}
965. {8, 10, 11, 2}
966. {8, 10, 12, 11}
967. {8, 10, 13, 4}
968. {8, 10, 13, 9}
669. {8, 11, 1, 3}
970. {8, 11, 1, 13}
971. {8, 11, 6, 2}
972. {8, 11, 6, 7}
973. {8, 11, 7, 2}
974. {8, 11, 10, 12}
975. {8, 11, 12, 10}
976. {8, 11, 13, 3}
977. {8, 12, 1, 4}
978. {8, 12, 1, 9}
979. {8, 12, 4, 7}
980. {8, 12, 5, 3}
981. {8, 12, 5, 4}
982. {8, 12, 5, 7}
983. {8, 12, 6, 7}
984. {8, 12, 6, 9}
985. {8, 12, 6, 10}
986. {8, 12, 7, 4}
987. {8, 12, 7, 9}
988. {8, 12, 9, 3}
989. {8, 12, 9, 7}
990. {8, 12, 10, 4}
991. {8, 12, 10, 11}
992. {8, 12, 11, 3}
993. {8, 13, 1, 7}
994. {8, 13, 1, 10}
995. {8, 13, 1, 11}
996. {8, 13, 4, 10}
997. {8, 13, 5, 3}
998. {8, 13, 5, 9}
999. {8, 13, 5, 10}
1000. {8, 13, 5, 11}
1001. {8, 13, 6, 9}
1002. {8, 13, 7, 9}
1003. {8, 13, 7, 11}
1004. {8, 13, 9, 7}
1005. {8, 13, 9, 10}
1006. {8, 13, 10, 4}
1007. {8, 13, 10, 9}
1008. {8, 13, 11, 7}
1009. {9, 1, 2, 5}
1010. {9, 1, 2, 12}
1011. {9, 1, 4, 5}
1012. {9, 1, 4, 7}
1013. {9, 1, 5, 2}
1014. {9, 1, 5, 4}
1015. {9, 1, 5, 7}
1016. {9, 1, 6, 11}
1017. {9, 1, 7, 8}
1018. {9, 1, 8, 7}
1019. {9, 1, 10, 7}
1020. {9, 1, 10, 8}
1021. {9, 1, 11, 2}
1022. {9, 1, 11, 5}
1023. {9, 1, 11, 10}
1024. {9, 1, 12, 8}

1025. {9, 3, 4, 2}
1026. {9, 3, 4, 5}
1027. {9, 3, 4, 7}
1028. {9, 3, 6, 5}
1029. {9, 3, 6, 8}
1030. {9, 3, 6, 10}
1031. {9, 3, 7, 4}
1032. {9, 3, 7, 5}
1033. {9, 3, 7, 12}
1034. {9, 3, 8, 5}
1035. {9, 3, 8, 12}
1036. {9, 3, 10, 2}
1037. {9, 3, 10, 4}
1038. {9, 3, 10, 11}
1039. {9, 3, 12, 2}
1040. {9, 3, 12, 7}

1041. {9, 4, 2, 3}
1042. {9, 4, 2, 5}
1043. {9, 4, 2, 12}
1044. {9, 4, 5, 1}
1045. {9, 4, 5, 2}
1046. {9, 4, 5, 3}
1047. {9, 4, 6, 1}
1048. {9, 4, 6, 5}
1049. {9, 4, 6, 10}
1050. {9, 4, 6, 13}
1051. {9, 4, 7, 3}
1052. {9, 4, 10, 3}
1053. {9, 4, 10, 7}
1054. {9, 4, 12, 1}
1055. {9, 4, 12, 2}
1056. {9, 4, 12, 7}

1057. {9, 5, 4, 1}
1058. {9, 5, 4, 2}
1059. {9, 5, 6, 11}
1060. {9, 5, 6, 13}
1061. {9, 5, 7, 3}
1062. {9, 5, 7, 8}
1063. {9, 5, 8, 3}
1064. {9, 5, 8, 7}
1065. {9, 6, 4, 1}
1066. {9, 6, 4, 5}
1067. {9, 6, 4, 10}
1068. {9, 6, 4, 13}
1069. {9, 6, 5, 3}
1070. {9, 6, 5, 4}
1071. {9, 6, 5, 11}
1072. {9, 6, 5, 13}

1073. {9, 6, 8, 3}
1074. {9, 6, 10, 8}
1075. {9, 6, 11, 3}
1076. {9, 6, 11, 5}
1077. {9, 6, 11, 12}
1078. {9, 6, 12, 1}
1079. {9, 6, 12, 8}
1080. {9, 6, 12, 13}
1081. {9, 7, 4, 1}
1082. {9, 7, 5, 1}
1083. {9, 7, 5, 3}
1084. {9, 7, 5, 8}
1085. {9, 7, 8, 1}
1086. {9, 7, 8, 5}
1087. {9, 7, 8, 12}
1088. {9, 7, 10, 1}

1089. {9, 7, 10, 4}
1090. {9, 7, 10, 11}
1091. {9, 7, 10, 13}
1092. {9, 7, 11, 3}
1093. {9, 7, 11, 5}
1094. {9, 7, 11, 10}
1095. {9, 7, 11, 13}
1096. {9. 7, 12, 8}
1097. {9, 8, 2, 3}
1098. {9, 8, 2, 5}
1099. {9, 8, 5, 2}
1100. {9, 8, 6, 13}
1101. {9, 8, 7, 12}
1102. {9, 8, 10, 13}
1103. {9, 8, 12, 1}
1104. {9, 8, 12, 7}

1105. {9, 10, 2, 3}
1106. {9, 10, 2, 8}
1107. {9, 10, 2, 13}
1108. {9, 10, 4, 7}
1109. {9, 10, 4, 13}
1110. {9, 10, 6, 8}
1111. {9, 10, 7, 1}
1112. {9, 10, 7, 4}
1113. {9, 10, 7, 11}
1114. {9, 10, 7, 13}
1115. {9, 10, 8, 1}
1116. {9, 10, 8, 2}
1117. {9, 10, 8, 13}
1118. {9, 10, 11, 1}
1119. {9, 10, 11, 2}
1120. {9, 10, 11, 7}

1121. {9, 11, 6, 1}
1122. {9, 11, 6, 5}
1123. {9, 11, 7, 3}
1124. {9, 11, 7, 10}
1125. {9, 11, 10, 3}
1126. {9, 11, 10, 7}
1127. {9, 11, 12, 2}
1128. {9, 11, 12, 13}
1129. {9, 12, 2, 1}
1130. {9, 12, 2, 4}
1131. {9, 12, 4, 2}
1132. {9, 12, 6, 13}
1133. {9, 12, 7, 8}
1134. {9, 12, 8, 3}
1135. {9, 12, 8, 7}
1136. {9, 12, 11, 13}

1137. {9, 13, 2, 4}
1138. {9, 13, 2, 5}
1139. {9, 13, 2, 10}
1140. {9, 13, 2, 11}
1141. {9, 13, 4, 2}
1142. {9, 13, 5, 2}
1143. {9, 13, 5, 8}
1144. {9, 13, 6, 8}
1145. {9, 13, 7, 8}
1146. {9, 13, 8, 7}
1147. {9, 13, 8, 10}
1148. {9, 13, 10, 8}
1149. {9, 13, 11, 2}
1150. {9, 13, 11, 12}
1151. {9, 13, 12, 7}
1152. {9, 13, 12, 11}

1153. {10, 3, 1, 5}
1154. {10, 3, 1, 12}
1155. {10, 3, 4, 5}
1156. {10, 3, 4, 9}
1157. {10, 3, 4, 11}
1158. {10, 3, 4, 13}
1159. {10, 3, 6, 1}
1160. {10, 3, 6, 9}
1161. {10, 3, 9, 2}
1162. {10, 3, 9, 4}
1163. {10, 3, 9, 11}
1164. {10, 3, 12, 2}
1165. {10, 3, 12, 11}
1166. {10, 3, 13, 4}
1167. {10, 3, 13, 5}
1168. {10, 3, 13, 12}

1169. {10, 5, 1, 3}
1170. {10, 5, 1, 7}
1171. {10, 5, 1, 11}
1172. {10, 5, 4, 8}
1173. {10, 5, 4, 11}
1174. {10, 5, 6, 7}
1175. {10, 5, 7, 1}
1176. {10, 5, 7, 2}
1177. {10, 5, 7, 11}
1178. {10, 5, 8, 2}
1179. {10, 5, 8, 4}
1180. {10, 5, 8, 11}
1181. {10, 5, 8, 13}
1182. {10, 5, 13, 1}
1183. {10, 5, 13, 2}
1184. {10, 5, 13, 8}

1185. {10, 6, 1, 3}
1186. {10, 6, 2, 5}
1187. {10, 6, 2, 12}
1188. {10, 6, 4, 5}
1189. {10, 6, 4, 8}
1190. {10, 6, 5, 3}
1191. {10, 6, 5, 4}
1192. {10, 6, 7, 4}
1193. {10, 6, 7, 5}
1194. {10, 6, 7, 12}
1195. {10, 6, 8, 4}
1196. {10, 6, 9, 1}
1197. {10, 6, 9, 4}
1198. {10, 6, 9, 8}
1199. {10, 6, 12, 11}
1200. {10, 6, 12, 8}

1201. {10, 7, 1, 13}
1202. {10, 7, 2, 5}
1203. {10, 7, 2, 11}
1204. {10, 7, 2, 12}
1205. {10, 7, 4, 11}
1206. {10, 7, 5, 1}
1207. {10, 7, 5, 11}
1208. {10, 7, 6, 5}
1209. {10, 7, 9, 1}
1210. {10, 7, 9, 4}
1211. {10, 7, 9, 11}
1212. {10, 7, 9, 13}
1213. {10, 7, 11, 4}
1214. {10, 7, 11, 5}
1215. {10, 7, 12, 13}
1216. {10, 7, 13, 1}

1217. {10, 8, 1, 13}
1218. {10, 8, 2, 5}
1219. {10, 8, 2, 9}
1220. {10, 8, 2, 11}
1221. {10, 8, 4, 13}
1222. {10, 8, 5, 2}
1223. {10, 8, 5, 13}
1224. {10, 8, 6, 2}
1225. {10, 8, 9, 13}
1226. {10, 8, 11, 2}
1227. {10, 8, 11, 12}
1228. {10, 8, 12, 1}
1229. {10, 8, 13, 1}
1230. {10, 8, 13, 4}
1231. {10, 8, 13, 5}
1232. {10, 8, 13, 9}

1233. {10, 9, 1, 8}
1234. {10, 9, 1, 11}
1235. {10, 9, 2, 8}
1236. {10, 9, 2, 11}
1237. {10, 9, 2, 13}
1238. {10, 9, 4, 13}
1239. {10, 9, 6, 1}
1240. {10, 9, 7, 1}
1241. {10, 9, 7, 4}
1242. {10, 9, 7, 11}
1243. {10, 9, 7, 13}
1244. {10, 9, 8, 13}
1245. {10, 9, 11, 1}
1246. {10, 9, 11, 3}
1247. {10, 9, 13, 4}
1248. {10, 9, 13, 8}

1249. {10, 11, 1, 5}
1250. {10, 11, 1, 8}
1251. {10, 11, 1, 9}
1252. {10, 11, 4, 5}
1253. {10, 11, 4, 7}
1254. {10, 11, 7, 2}
1255. {10, 11, 7, 4}
1256. {10, 11, 7, 5}
1257. {10, 11, 7, 9}
1258. {10, 11, 8, 1}
1259. {10, 11, 8, 5}
1260. {10, 11, 8, 12}
1261. {10, 11, 9, 2}
1262. {10, 11, 9, 3}
1263. {10, 11, 9, 7}
1264. {10, 11, 12, 2}

1265. {10, 12, 1, 13}
1266. {10, 12, 2, 3}
1267. {10, 12, 2, 7}
1268. {10, 12, 4, 8}
1269. {10, 12, 4, 13}
1270. {10, 12, 6, 2}
1271. {10, 12, 6, 8}
1272. {10, 12, 7, 13}
1273. {10, 12, 8, 1}
1274. {10, 12, 8, 4}
1275. {10, 12, 8, 11}
1276. {10, 12, 11, 2}
1277. {10, 12, 11, 8}
1278. {10, 12, 13, 3}
1279. {10, 12, 13, 4}
1280. {10, 12, 13, 7}

1281. {10, 13, 1, 8}
1282. {10, 13, 1, 12}
1283. {10, 13, 2, 3}
1284. {10, 13, 2, 7}
1285. {10, 13, 2, 9}
1286. {10, 13, 4, 8}
1287. {10, 13, 5, 2}
1288. {10, 13, 5, 8}
1289. {10, 13, 7, 2}
1290. {10, 13, 8, 1}
1291. {10, 13, 8, 4}
1292. {10, 13, 8, 5}
1293. {10, 13, 8, 9}
1294. {10, 13, 9, 2}
1295. {10, 13, 9, 8}
1296. {10, 13, 12, 7}

1297. {11, 1, 2, 8}
1298. {11, 1, 2, 13}
1299. {11, 1, 4, 5}
1300. {11, 1, 5, 4}
1301. {11, 1, 5, 9}
1302. {11, 1, 5, 10}
1303. {11, 1, 5, 13}
1304. {11, 1, 6, 9}
1305. {11, 1, 8, 10}
1306. {11, 1, 9, 2}
1307. {11, 1, 9, 5}
1308. {11, 1, 9, 10}
1309. {11, 1, 10, 3}
1310. {11, 1, 13, 2}
1311. {11, 1, 13, 5}
1312. {11, 1, 13, 8}

1313. {11, 3, 1, 8}
1314. {11, 3, 1, 10}
1315. {11, 3, 4, 7}
1316. {11, 3, 6, 1}
1317. {11, 3, 7, 4}
1318. {11, 3, 7, 9}
1319. {11, 3, 7, 13}
1320. {11, 3, 8, 12}
1321. {11, 3, 9, 7}
1322. {11, 3, 9, 12}
1323. {11, 3, 10, 1}
1324. {11, 3, 12, 8}
1325. {11, 3, 12, 10}
1326. {11, 3, 12, 13}
1327. {11, 3, 13, 7}
1328. {11, 3, 13, 12}

1329. {11, 4, 1, 3}
1330. {11, 4, 1, 5}
1331. {11, 4, 1, 13}
1332. {11, 4, 2, 7}
1333. {11, 4, 2, 12}
1334. {11, 4, 5, 1}
1335. {11, 4, 5, 12}
1336. {11, 4, 6, 7}
1337. {11, 4, 7, 10}
1338. {11, 4, 10, 7}
1339. {11, 4, 12, 2}
1340. {11, 4, 12, 5}
1341. {11, 4, 12, 10}
1342. {11, 4, 12, 13}
1343. {11, 4, 13, 1}
1344. {11, 4, 13, 12}

1345. {11, 5, 1, 4}
1346. {11, 5, 1, 9}
1347. {11, 5, 1, 10}
1348. {11, 5, 1, 13}
1349. {11, 5, 4, 1}
1350. {11, 5, 6, 7}
1351. {11, 5, 7, 8}
1352. {11, 5, 7, 10}
1353. {11, 5, 8, 7}
1354. {11, 5, 9, 1}
1355. {11, 5, 9, 7}
1356. {11, 5, 10, 7}
1357. {11, 5, 12, 8}
1358. {11, 5, 12, 13}
1359. {11, 5, 13, 1}
1360. {11, 5, 13, 12}

1361. {11, 6, 1, 4}
1362. {11, 6, 2, 1}
1363. {11, 6, 4, 1}
1364. {11, 6, 5, 12}
1365. {11, 6, 7, 3}
1366. {11, 6, 7, 8}
1367. {11, 6, 9, 12}
1368. {11, 6, 12, 5}
1369. {11, 7, 2, 8}
1370. {11, 7, 2, 10}
1371. {11, 7, 2, 13}
1372. {11, 7, 4, 10}
1373. {11, 7, 5, 8}
1374. {11, 7, 5, 10}
1375. {11, 7, 6, 5}
1376. {11, 7, 8, 5}

1377. {11, 7, 8, 13}
1378. {11, 7, 9, 3}
1379. {11, 7, 9, 5}
1380. {11, 7, 9, 10}
1381. {11, 7, 9, 13}
1382. {11, 7, 10, 4}
1383. {11, 7, 10, 5}
1384. {11, 7, 13, 8}
1385. {11, 8, 1, 13}
1386. {11, 8, 2, 7}
1387. {11, 8, 5, 12}
1388. {11, 8, 7, 2}
1389. {11, 8, 10, 12}
1390. {11, 8, 12, 5}
1391. {11, 8, 12, 10}
1392. {11, 8, 13, 1}

1393. {11, 9, 1, 5}
1394. {11, 9, 2, 12}
1395. {11, 9, 5, 1}
1396. {11, 9, 6, 1}
1397. {11, 9, 7, 3}
1398. {11, 9, 7, 10}
1399. {11, 9, 12, 13}
1400. {11, 9, 13, 12}
1401. {11, 10, 1, 3}
1402. {11, 10, 1, 5}
1403. {11, 10, 1, 8}
1404. {11, 10, 2, 7}
1405. {11, 10, 2, 12}
1406. {11, 10, 4, 7}
1407. {11, 10, 5, 1}
1408. {11, 10, 5, 7}

1409. {11, 10, 7, 2}
1410. {11, 10, 7, 4}
1411. {11, 10, 7, 5}
1412. {11, 10, 7, 9}
1413. {11, 10, 8, 1}
1414. {11, 10, 9, 1}
1415. {11, 10, 9, 7}
1416. {11, 10, 12, 8}
1417. {11, 12, 2, 4}
1418. {11, 12, 2, 9}
1419. {11, 12, 2, 10}
1420. {11, 12, 4, 2}
1421. {11, 12, 4, 13}
1422. {11, 12, 5, 8}
1423. {11, 12, 5, 13}
1424. {11, 12, 6, 2}
1425. {11, 12, 6, 8}
1426. {11, 12, 8, 3}
1427. {11, 12, 9, 13}
1428. {11, 12, 10, 8}
1429. {11, 12, 13, 3}
1430. {11, 12, 13, 4}
1431. {11, 12, 13, 5}
1432. {11, 12, 13, 9}
1433. {11, 13, 1, 2}
1434. {11, 13, 2, 1}
1435. {11, 13, 5, 12}
1436. {11, 13, 7, 8}
1437. {11, 13, 8, 7}
1438. {11, 13, 9, 12}
1439. {11, 13, 12, 5}
1440. {11, 13, 12, 9}
1441. {12, 1, 2, 3}
1442. {12, 1, 2, 9}
1443. {12, 1, 4, 5}
1444. {12, 1, 4, 8}
1445. {12, 1, 4, 9}
1446. {12, 1, 5, 2}
1447. {12, 1, 5, 4}
1448. {12, 1, 6, 2}
1449. {12, 1, 6, 13}
1450. {12, 1, 8, 3}
1451. {12, 1, 9, 4}
1452. {12, 1, 9, 8}
1453. {12, 1, 10, 8}
1454. {12, 1, 13, 4}
1455. {12, 1, 13, 5}
1456. {12, 1, 13, 10}
1457. {12, 3, 1, 5}
1458. {12, 3, 1, 8}
1459. {12, 3, 7, 2}
1460. {12, 3, 7, 9}
1461. {12, 3, 8, 1}
1462. {12, 3, 9, 7}
1463. {12, 3, 10, 11}
1464. {12, 3, 13, 11}
1465. {12, 4, 1, 5}
1466. {12, 4, 1, 8}
1467. {12, 4, 1, 9}
1468. {12, 4, 2, 7}
1469. {12, 4, 5, 1}
1470. {12, 4, 7, 8}
1471. {12, 4, 8, 7}
1472. {12, 4, 9, 1}
1473. {12, 4, 9, 7}
1474. {12, 4, 10, 7}
1475. {12, 4, 11, 2}
1476. {12, 4, 11, 5}
1477. {12, 4, 11, 10}
1478. {12, 4, 11, 13}
1479. {12, 4, 13, 1}
1480. {12, 4, 13, 11}
1481. {12, 5, 1, 2}
1482. {12, 5, 1, 4}
1483. {12, 5, 4, 1}
1484. {12, 5, 6, 11}
1485. {12, 5, 7, 3}
1486. {12, 5, 7, 8}
1487. {12, 5, 8, 7}
1488. {12, 5, 13, 11}
1489. {12, 6, 1, 13}
1490. {12, 6, 2, 11}
1491. {12, 6, 5, 11}
1492. {12, 6, 7, 8}
1493. {12, 6, 7, 10}
1494. {12, 6, 9, 1}
1495. {12, 6, 11, 5}
1496. {12, 6, 13, 1}
1497. {12, 7, 2, 4}
1498. {12, 7, 2, 5}
1499. {12, 7, 4, 8}
1500. {12, 7, 5, 3}
1501. {12, 7, 5, 8}
1502. {12, 7, 6, 5}
1503. {12, 7, 6, 8}
1504. {12, 7, 6, 10}
1505. {12, 7, 8, 4}
1506. {12, 7, 8, 5}
1507. {12, 7, 9, 3}
1508. {12, 7, 9, 4}
1509. {12, 7, 9, 8}
1510. {12, 7, 10, 4}
1511. {12, 7, 10, 13}
1512. {12, 7, 13, 3}
1513. {12, 8, 1, 3}
1514. {12, 8, 1, 4}
1515. {12, 8, 4, 1}
1516. {12, 8, 4, 7}
1517. {12, 8, 5, 7}
1518. {12, 8, 6, 7}
1519. {12, 8, 6, 11}
1520. {12, 8, 7, 4}
1521. {12, 8, 7, 5}
1522. {12, 8, 7, 9}
1523. {12, 8, 9, 1}
1524. {12, 8, 9, 7}
1525. {12, 8, 10, 1}
1526. {12, 8, 11, 3}
1527. {12, 8, 11, 5}
1528. {12, 8, 11, 10}
1529. {12, 9, 1, 4}
1530. {12, 9, 2, 1}
1531. {12, 9, 4, 1}
1532. {12, 9, 6, 11}
1533. {12, 9, 7, 3}
1534. {12, 9, 7, 8}
1535. {12, 9, 11, 13}
1536. {12, 9, 13, 11}
1537. {12, 10, 1, 3}
1538. {12, 10, 1, 8}
1539. {12, 10, 2, 11}
1540. {12, 10, 4, 7}
1541. {12, 10, 4, 11}
1542. {12, 10, 6, 1}
1543. {12, 10, 6, 7}
1544. {12, 10, 7, 2}
1545. {12, 10, 7, 4}
1546. {12, 10, 7, 13}
1547. {12, 10, 8, 11}
1548. {12, 10, 11, 3}
1549. {12, 10, 11, 4}
1550. {12, 10, 11, 8}
1551. {12, 10, 13, 1}
1552. {12, 10, 13, 7}
1553. {12, 11, 4, 2}
1554. {12, 11, 4, 5}
1555. {12, 11, 4, 10}
1556. {12, 11, 4, 13}
1557. {12, 11, 6, 5}
1558. {12, 11, 6, 8}
1559. {12, 11, 6, 9}
1560. {12, 11, 8, 10}
1561. {12, 11, 9, 2}
1562. {12, 11, 9, 3}
1563. {12, 11, 9, 13}
1564. {12, 11, 10, 3}
1565. {12, 11, 13, 3}
1566. {12, 11, 13, 4}
1567. {12, 11, 13, 5}
1568. {12, 11, 13, 9}
1569. {12, 13, 1, 4}
1570. {12, 13, 1, 5}
1571. {12, 13, 1, 10}
1572. {12, 13, 4, 1}
1573. {12, 13, 4, 11}
1574. {12, 13, 5, 11}
1575. {12, 13, 6, 1}
1576. {12, 13, 6, 7}
1577. {12, 13, 7, 3}
1578. {12, 13, 9, 7}
1579. {12, 13, 9, 11}
1580. {12, 13, 10, 7}
1581. {12, 13, 11, 3}
1582. {12, 13, 11, 4}
1583. {12, 13, 11, 5}
1584. {12, 13, 11, 9}
1585. {13, 1, 2, 5}
1586. {13, 1, 2, 7}
1587. {13, 1, 4, 8}
1588. {13, 1, 4, 11}
1589. {13, 1, 5, 2}
1590. {13, 1, 5, 11}
1591. {13, 1, 5, 12}
1592. {13, 1, 6, 2}
1593. {13, 1, 7, 10}
1594. {13, 1, 8, 10}
1595. {13, 1, 10, 7}
1596. {13, 1, 10, 8}
1597. {13, 1, 11, 4}
1598. {13, 1, 11, 5}
1599. {13, 1, 11, 8}
1600. {13, 1, 12, 10}

1601. {13, 3, 4, 8}	1617. {13, 4, 2, 3}	1633. {13, 5, 6, 2}	1649. {13, 7, 2, 3}
1602. {13, 3, 4, 10}	1618. {13, 4, 2, 9}	1634. {13, 5, 6, 9}	1650. {13, 7, 2, 11}
1603. {13, 3, 4, 11}	1619. {13, 4, 2, 11}	1635. {13, 5, 8, 3}	1651. {13, 7, 6, 1}
1604. {13, 3, 6, 5}	1620. {13, 4, 6, 1}	1636. {13, 5, 8, 10}	1652. {13, 7, 6, 8}
1605. {13, 3, 6, 7}	1621. {13, 4, 6, 8}	1637. {13, 5, 10, 3}	1653. {13, 7, 8, 1}
1606. {13, 3, 7, 2}	1622. {13, 4, 6, 9}	1638. {13, 5, 10, 8}	1654. {13, 7, 10, 12}
1607. {13, 3, 7, 12}	1623. {13, 4, 8, 10}	1639. {13, 5, 12, 1}	1655. {13, 7, 11, 3}
1608. {13, 3, 8, 4}	1624. {13, 4, 10, 3}	1640. {13, 5, 12, 11}	1656. {13, 7, 12, 10}
1609. {13, 3, 8, 5}	1625. {13, 4, 10, 8}	1641. {13, 6, 2, 1}	1657. {13, 8, 4, 10}
1610. {13, 3, 8, 11}	1626. {13, 4, 11, 2}	1642. {13, 6, 2, 4}	1658. {13, 8, 5, 3}
1611. {13, 3, 10, 2}	1627. {13, 4, 11, 3}	1643. {13, 6, 4, 1}	1659. {13, 8, 5, 9}
1612. {13, 3, 10, 4}	1628. {13, 4, 11, 12}	1644. {13, 6, 5, 12}	1660. {13, 8, 5, 10}
1613. {13, 3, 10, 12}	1629. {13, 4, 12, 1}	1645. {13, 6, 7, 3}	1661. {13, 8, 5, 11}
1614. {13, 3, 12, 5}	1630. {13, 4, 12, 9}	1646. {13, 6, 7, 8}	1662. {13, 8, 6, 9}
1615. {13, 3, 12, 7}	1631. {13, 4, 12, 10}	1647. {13, 6, 8, 3}	1663. {13, 8, 7, 1}
1616. {13, 3, 12, 11}	1632. {13, 4, 12, 11}	1648. {13, 6, 12, 5}	1664. {13, 8, 7, 9}
1665. {13, 8, 7, 11}	1681. {13, 9, 6, 8}	1697. {13, 10, 7, 2}	1713. {13, 12, 4, 1}
1666. {13, 8, 10, 1}	1682. {13, 9, 7, 8}	1698. {13, 10, 7, 9}	1714. {13, 12, 4, 9}
1667. {13, 8, 10, 4}	1683. {13, 9, 7, 10}	1699. {13, 10, 7, 12}	1715. {13, 12, 4, 10}
1668. {13, 8, 10, 5}	1684. {13, 9, 8, 10}	1700. {13, 10, 8, 1}	1716. {13, 12, 4, 11}
1669. {13, 8, 10, 9}	1685. {13, 9, 10, 8}	1701. {13, 10, 8, 4}	1717. {13, 12, 5, 1}
1670. {13, 8, 11, 1}	1686. {13, 9, 11, 5}	1702. {13, 10, 8, 5}	1718. {13, 12, 5, 3}
1671. {13, 8, 11, 5}	1687. {13, 9, 11, 12}	1703. {13, 10, 8, 9}	1719. {13, 12, 5, 11}
1672. {13, 8, 11, 7}	1688. {13, 9, 12, 11}	1704. {13, 10, 12, 1}	1720. {13, 12, 6, 5}
1673. {13, 9, 2, 4}	1689. {13, 10, 2, 5}	1705. {13, 11, 4, 1}	1721. {13, 12, 6, 7}
1674. {13, 9, 2, 5}	1690. {13, 10, 2, 7}	1706. {13, 11, 4, 2}	1722. {13, 12, 6, 9}
1675. {13, 9, 2, 10}	1691. {13, 10, 2, 9}	1707. {13, 11, 7, 3}	1723. {13, 12, 7, 10}
1676. {13, 9, 2, 11}	1692. {13, 10, 4, 8}	1708. {13, 11, 7, 8}	1724. {13, 12, 10, 3}
1677. {13, 9, 4, 10}	1693. {13, 10, 4, 9}	1709. {13, 11, 8, 3}	1725. {13, 12, 11, 3}
1678. {13, 9, 5, 8}	1694. {13, 10, 5, 1}	1710. {13, 11, 8, 7}	1726. {13, 12, 11, 4}
1679. {13, 9, 5, 11}	1695. {13, 10, 5, 3}	1711. {13, 11, 12, 5}	1727. {13, 12, 11, 5}
1680. {13, 9, 6, 5}	1696. {13, 10, 5, 8}	1712. {13, 11, 12, 9}	1728. {13, 12, 11, 9}

Die entsprechenden (mit gleichem Index wie diese Nummern versehenen), hierdurch erzeugten fixpunktfreien Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, 1728$) erhält man jetzt durch Betrachtung der durch je eine der ersten 144 $\boldsymbol{T}_\mu^{(\mathrm{I})}$ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots, 144$) erzeugten zyklischen Gruppe $\boldsymbol{U}_\mu^{(\mathrm{I})}$ *der Ordnung* 13. Diese möge jetzt explizit für die ersten 16 $\boldsymbol{T}_\lambda^{(\mathrm{I})}$ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots, 16$) gezeigt werden. Alle übrigen $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{I})}$ wären analog zu gewinnen, so daß wir dies dem Leser überlassen und uns darauf beschränken können, die dabei sich ergebenden Aussagen festzuhalten [7]).

1) $\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})}$ ist die folgende fixpunktfreie Inzidenzabbildung:

$$\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11 \to 12 \to 13 \to 1$$

[7]) Man leistet dabei, im Interesse einer kürzeren Beweisführung, bewußt auf eine explizite Angabe der übrigen $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{I})}$ Verzicht. Doch kann man sich nach der in 16 Fällen explizit aufgewiesenen Entstehungsvorschrift die für spätere geometrisch-axiomatische Untersuchungen jeweils nötigen $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{I})}$ leicht und schnell analog herstellen. Dies ist um so leichter deshalb möglich, als wir die Ergebnisse in diesem Beweisgang für *alle* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}$ mitteilen.

und erzeugt die folgende zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_1^{(\mathrm{I})}$:

$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^2 = 1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 11 \to 13 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8 \to 10 \to 12 \to 1 = \boldsymbol{T}_{164}^{(\mathrm{J})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^3 = 1 \to 4 \to 7 \to 10 \to 13 \to 3 \to 6 \to 9 \to 12 \to 2 \to 5 \to 8 \to 11 \to 1 = \boldsymbol{T}_{309}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^4 = 1 \to 5 \to 9 \to 13 \to 4 \to 8 \to 12 \to 3 \to 7 \to 11 \to 2 \to 6 \to 10 \to 1 = \boldsymbol{T}_{486}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^5 = 1 \to 6 \to 11 \to 3 \to 8 \to 13 \to 5 \to 10 \to 2 \to 7 \to 12 \to 4 \to 9 \to 1 = \boldsymbol{T}_{641}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^6 = 1 \to 7 \to 13 \to 6 \to 12 \to 5 \to 11 \to 4 \to 10 \to 3 \to 9 \to 2 \to 8 \to 1 = \boldsymbol{T}_{788}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^7 = 1 \to 8 \to 2 \to 9 \to 3 \to 10 \to 4 \to 11 \to 5 \to 12 \to 6 \to 13 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{951}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^8 = 1 \to 9 \to 4 \to 12 \to 7 \to 2 \to 10 \to 5 \to 13 \to 8 \to 3 \to 11 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1118}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^9 = 1 \to 10 \to 6 \to 2 \to 11 \to 7 \to 3 \to 12 \to 8 \to 4 \to 13 \to 9 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1264}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^{10} = 1 \to 11 \to 8 \to 5 \to 2 \to 12 \to 9 \to 6 \to 3 \to 13 \to 10 \to 7 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1429}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^{11} = 1 \to 12 \to 10 \to 8 \to 6 \to 4 \to 2 \to 13 \to 11 \to 9 \to 7 \to 5 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1569}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^{12} = 1 \to 13 \to 12 \to 11 \to 10 \to 9 \to 8 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1585}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^{13} = 1 \leftrightarrow 1,\ 2 \leftrightarrow 2,\ 3 \leftrightarrow 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ 13 \leftrightarrow 13 = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

2) $\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})}$ lautet:

$$\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 11 \to 12 \to 8 \to 7 \to 13 \to 10 \to 5 \to 6 \to 9 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_2^{(\mathrm{I})}$:

$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^2 = 1 \to 3 \to 11 \to 8 \to 13 \to 5 \to 9 \to 2 \to 4 \to 12 \to 7 \to 10 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{174}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^3 = 1 \to 4 \to 8 \to 10 \to 9 \to 3 \to 12 \to 13 \to 6 \to 2 \to 11 \to 7 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{394}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^4 = 1 \to 11 \to 13 \to 9 \to 4 \to 7 \to 6 \to 3 \to 8 \to 5 \to 2 \to 12 \to 10 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1426}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^5 = 1 \to 12 \to 5 \to 3 \to 7 \to 9 \to 11 \to 10 \to 2 \to 8 \to 6 \to 4 \to 13 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1520}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^6 = 1 \to 8 \to 9 \to 12 \to 6 \to 11 \to 5 \to 4 \to 10 \to 3 \to 13 \to 2 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{944}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^7 = 1 \to 7 \to 2 \to 13 \to 3 \to 10 \to 4 \to 5 \to 11 \to 6 \to 12 \to 9 \to 8 \to 1 = \boldsymbol{T}_{861}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^8 = 1 \to 13 \to 4 \to 6 \to 8 \to 2 \to 10 \to 11 \to 9 \to 7 \to 3 \to 5 \to 12 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1696}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^9 = 1 \to 10 \to 12 \to 2 \to 5 \to 8 \to 3 \to 6 \to 7 \to 4 \to 9 \to 13 \to 11 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1174}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^{10} = 1 \to 5 \to 7 \to 11 \to 2 \to 6 \to 13 \to 12 \to 3 \to 9 \to 10 \to 8 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{490}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^{11} = 1 \to 6 \to 10 \to 7 \to 12 \to 4 \to 2 \to 9 \to 5 \to 13 \to 8 \to 11 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{666}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^{12} = 1 \to 9 \to 6 \to 5 \to 10 \to 13 \to 7 \to 8 \to 12 \to 11 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1009}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

3) $\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})}$ lautet:

$$\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 8 \to 13 \to 9 \to 7 \to 10 \to 11 \to 4 \to 5 \to 12 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_3^{(\mathrm{I})}$:

$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})})^2 = 1 \to 3 \to 8 \to 9 \to 10 \to 4 \to 12 \to 2 \to 6 \to 13 \to 7 \to 11 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{198}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})})^3 = 1 \to 6 \to 9 \to 11 \to 12 \to 3 \to 13 \to 10 \to 5 \to 2 \to 8 \to 7 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{664}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})})^4 = 1 \to 8 \to 10 \to 12 \to 6 \to 7 \to 5 \to 3 \to 9 \to 4 \to 2 \to 13 \to 11 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1004}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})})^5 = 1 \to 13 \to 4 \to 3 \to 7 \to 12 \to 8 \to 11 \to 2 \to 9 \to 5 \to 6 \to 10 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1683}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})})^6 = 1 \to 9 \to 12 \to 13 \to 5 \to 8 \to 4 \to 6 \to 11 \to 3 \to 10 \to 2 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1090}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})})^7 = 1 \to 7 \to 2 \to 10 \to 3 \to 11 \to 6 \to 4 \to 8 \to 5 \to 13 \to 12 \to 9 \to 1 = \boldsymbol{T}_{819}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})})^8 = 1 \to 10 \to 6 \to 5 \to 9 \to 2 \to 11 \to 8 \to 12 \to 7 \to 3 \to 4 \to 13 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1252}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})})^9 = 1 \to 11 \to 13 \to 2 \to 4 \to 9 \to 3 \to 5 \to 7 \to 6 \to 12 \to 10 \to 8 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1335}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})})^{10} = 1 \to 4 \to 7 \to 8 \to 2 \to 5 \to 10 \to 13 \to 3 \to 12 \to 11 \to 9 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{318}^{(\mathrm{I})}$$

$$(T_3^{(I)})^{11} = 1 \to 5 \to 11 \to 7 \to 13 \to 6 \to 2 \to 12 \to 4 \to 10 \to 9 \to 8 \to 3 \to 1 = T_{561}^{(I)}$$
$$(T_3^{(I)})^{12} = 1 \to 12 \to 5 \to 4 \to 11 \to 10 \to 7 \to 9 \to 13 \to 8 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{1441}^{(I)}$$
$$(T_3^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

4) $T_4^{(I)}$ lautet:

$$T_4^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 10 \to 5 \to 4 \to 11 \to 12 \to 13 \to 9 \to 7 \to 8 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_4^{(I)}$:

$$(T_4^{(I)})^{2} = 1 \to 3 \to 10 \to 4 \to 12 \to 9 \to 8 \to 2 \to 6 \to 5 \to 11 \to 13 \to 7 \to 1 = T_{199}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{3} = 1 \to 6 \to 4 \to 13 \to 8 \to 3 \to 5 \to 12 \to 7 \to 2 \to 10 \to 11 \to 9 \to 1 = T_{687}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{4} = 1 \to 10 \to 12 \to 8 \to 6 \to 11 \to 7 \to 3 \to 4 \to 9 \to 2 \to 5 \to 13 \to 1 = T_{1173}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{5} = 1 \to 5 \to 9 \to 3 \to 11 \to 8 \to 10 \to 13 \to 2 \to 4 \to 7 \to 6 \to 12 \to 1 = T_{479}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{6} = 1 \to 4 \to 8 \to 5 \to 7 \to 10 \to 9 \to 6 \to 13 \to 3 \to 12 \to 2 \to 11 \to 1 = T_{397}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{7} = 1 \to 11 \to 2 \to 12 \to 3 \to 13 \to 6 \to 9 \to 10 \to 7 \to 5 \to 8 \to 4 \to 1 = T_{1432}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{8} = 1 \to 12 \to 6 \to 7 \to 4 \to 2 \to 13 \to 10 \to 8 \to 11 \to 3 \to 9 \to 5 \to 1 = T_{1578}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{9} = 1 \to 13 \to 5 \to 2 \to 9 \to 4 \to 3 \to 7 \to 11 \to 6 \to 8 \to 12 \to 10 \to 1 = T_{1682}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{10} = 1 \to 9 \to 11 \to 10 \to 2 \to 7 \to 12 \to 5 \to 3 \to 8 \to 13 \to 4 \to 6 \to 1 = T_{1085}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{11} = 1 \to 7 \to 13 \to 11 \to 5 \to 6 \to 2 \to 8 \to 9 \to 12 \to 4 \to 10 \to 3 \to 1 = T_{785}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{12} = 1 \to 8 \to 7 \to 9 \to 13 \to 12 \to 11 \to 4 \to 5 \to 10 \to 6 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{865}^{(I)}$$
$$(T_4^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

5) $T_5^{(I)}$ lautet:

$$T_5^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 7 \to 12 \to 13 \to 9 \to 6 \to 4 \to 5 \to 10 \to 11 \to 8 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_5^{(I)}$:

$$(T_5^{(I)})^{2} = 1 \to 3 \to 12 \to 9 \to 4 \to 10 \to 8 \to 2 \to 7 \to 13 \to 6 \to 5 \to 11 \to 1 = T_{208}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{3} = 1 \to 7 \to 9 \to 5 \to 8 \to 3 \to 13 \to 4 \to 11 \to 2 \to 12 \to 6 \to 10 \to 1 = T_{856}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{4} = 1 \to 12 \to 4 \to 8 \to 7 \to 6 \to 11 \to 3 \to 9 \to 10 \to 2 \to 13 \to 5 \to 1 = T_{1579}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{5} = 1 \to 13 \to 10 \to 3 \to 6 \to 8 \to 12 \to 5 \to 2 \to 9 \to 11 \to 7 \to 4 \to 1 = T_{1681}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{6} = 1 \to 9 \to 8 \to 13 \to 11 \to 12 \to 10 \to 7 \to 5 \to 3 \to 4 \to 2 \to 6 \to 1 = T_{1065}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{7} = 1 \to 6 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 7 \to 10 \to 12 \to 11 \to 13 \to 8 \to 9 \to 1 = T_{605}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{8} = 1 \to 4 \to 7 \to 11 \to 9 \to 2 \to 5 \to 12 \to 8 \to 6 \to 3 \to 10 \to 13 \to 1 = T_{316}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{9} = 1 \to 5 \to 13 \to 2 \to 10 \to 9 \to 3 \to 11 \to 6 \to 7 \to 8 \to 4 \to 12 \to 1 = T_{542}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{10} = 1 \to 10 \to 6 \to 12 \to 2 \to 11 \to 4 \to 13 \to 3 \to 8 \to 5 \to 9 \to 7 \to 1 = T_{1260}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{11} = 1 \to 11 \to 5 \to 6 \to 13 \to 7 \to 2 \to 8 \to 10 \to 4 \to 9 \to 12 \to 3 \to 1 = T_{1385}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{12} = 1 \to 8 \to 11 \to 10 \to 5 \to 4 \to 6 \to 9 \to 13 \to 12 \to 7 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{866}^{(I)}$$
$$(T_5^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

6) $T_6^{(I)}$ lautet:

$$T_6^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 7 \to 4 \to 11 \to 10 \to 5 \to 8 \to 13 \to 9 \to 6 \to 12 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_6^{(I)}$:

$$(T_6^{(I)})^{2} = 1 \to 3 \to 4 \to 10 \to 8 \to 9 \to 12 \to 2 \to 7 \to 11 \to 5 \to 13 \to 6 \to 1 = T_{203}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^{3} = 1 \to 7 \to 10 \to 13 \to 12 \to 3 \to 11 \to 8 \to 6 \to 2 \to 4 \to 5 \to 9 \to 1 = T_{755}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^{4} = 1 \to 4 \to 8 \to 12 \to 7 \to 5 \to 6 \to 3 \to 10 \to 9 \to 2 \to 11 \to 13 \to 1 = T_{392}^{(I)}$$

$$(T_6^{(I)})^5 = 1 \to 11 \to 9 \to 3 \to 5 \to 12 \to 4 \to 13 \to 2 \to 10 \to 6 \to 7 \to 8 \to 1 = T_{1408}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^6 = 1 \to 10 \to 12 \to 11 \to 6 \to 4 \to 9 \to 7 \to 13 \to 3 \to 8 \to 2 \to 5 \to 1 = T_{1179}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^7 = 1 \to 5 \to 2 \to 8 \to 3 \to 13 \to 7 \to 9 \to 4 \to 6 \to 11 \to 12 \to 10 \to 1 = T_{520}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^8 = 1 \to 8 \to 7 \to 6 \to 10 \to 2 \to 13 \to 4 \to 12 \to 5 \to 3 \to 9 \to 11 \to 1 = T_{1005}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^9 = 1 \to 13 \to 11 \to 2 \to 9 \to 10 \to 3 \to 6 \to 5 \to 7 \to 12 \to 8 \to 4 \to 1 = T_{1680}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^{10} = 1 \to 9 \to 5 \to 4 \to 2 \to 6 \to 8 \to 11 \to 3 \to 12 \to 13 \to 10 \to 7 \to 1 = T_{1079}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^{11} = 1 \to 6 \to 13 \to 5 \to 11 \to 7 \to 2 \to 12 \to 9 \to 8 \to 10 \to 4 \to 3 \to 1 = T_{705}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^{12} = 1 \to 12 \to 6 \to 9 \to 13 \to 8 \to 5 \to 10 \to 11 \to 4 \to 7 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{1442}^{(I)}$$
$$(T_6^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

7) $T_7^{(I)}$ lautet:

$$T_7^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 8 \to 4 \to 5 \to 10 \to 11 \to 7 \to 9 \to 13 \to 12 \to 6 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_7^{(I)}$:

$$(T_7^{(I)})^2 = 1 \to 3 \to 4 \to 10 \to 7 \to 13 \to 6 \to 2 \to 8 \to 5 \to 11 \to 9 \to 12 \to 1 = T_{211}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^3 = 1 \to 8 \to 10 \to 9 \to 6 \to 3 \to 5 \to 7 \to 12 \to 2 \to 4 \to 11 \to 13 \to 1 = T_{893}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^4 = 1 \to 4 \to 7 \to 6 \to 8 \to 11 \to 12 \to 3 \to 10 \to 13 \to 2 \to 5 \to 9 \to 1 = T_{317}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^5 = 1 \to 5 \to 13 \to 3 \to 11 \to 6 \to 4 \to 9 \to 2 \to 10 \to 12 \to 8 \to 7 \to 1 = T_{541}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^6 = 1 \to 10 \to 6 \to 5 \to 12 \to 4 \to 13 \to 8 \to 9 \to 3 \to 7 \to 2 \to 11 \to 1 = T_{1256}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^7 = 1 \to 11 \to 2 \to 7 \to 3 \to 9 \to 8 \to 13 \to 4 \to 12 \to 5 \to 6 \to 10 \to 1 = T_{1380}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^8 = 1 \to 7 \to 8 \to 12 \to 10 \to 2 \to 9 \to 4 \to 6 \to 11 \to 3 \to 13 \to 5 \to 1 = T_{807}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^9 = 1 \to 9 \to 5 \to 2 \to 13 \to 10 \to 3 \to 12 \to 11 \to 8 \to 6 \to 7 \to 4 \to 1 = T_{1151}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^{10} = 1 \to 13 \to 11 \to 4 \to 2 \to 12 \to 7 \to 5 \to 3 \to 6 \to 9 \to 10 \to 8 \to 1 = T_{1722}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^{11} = 1 \to 12 \to 9 \to 11 \to 5 \to 8 \to 2 \to 6 \to 13 \to 7 \to 10 \to 4 \to 3 \to 1 = T_{1489}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^{12} = 1 \to 6 \to 12 \to 13 \to 9 \to 7 \to 11 \to 10 \to 5 \to 4 \to 8 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{578}^{(I)}$$
$$(T_7^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

8) $T_8^{(I)}$ lautet:

$$T_8^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 8 \to 6 \to 9 \to 13 \to 12 \to 4 \to 11 \to 10 \to 5 \to 7 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_8^{(I)}$:

$$(T_8^{(I)})^2 = 1 \to 3 \to 6 \to 13 \to 4 \to 10 \to 7 \to 2 \to 8 \to 9 \to 12 \to 11 \to 5 \to 1 = T_{213}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^3 = 1 \to 8 \to 13 \to 11 \to 7 \to 3 \to 9 \to 4 \to 5 \to 2 \to 6 \to 12 \to 10 \to 1 = T_{929}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^4 = 1 \to 6 \to 4 \to 7 \to 8 \to 12 \to 5 \to 3 \to 13 \to 10 \to 2 \to 9 \to 11 \to 1 = T_{679}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^5 = 1 \to 9 \to 10 \to 3 \to 12 \to 7 \to 6 \to 11 \to 2 \to 13 \to 5 \to 8 \to 4 \to 1 = T_{1152}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^6 = 1 \to 13 \to 7 \to 9 \to 5 \to 6 \to 10 \to 8 \to 11 \to 3 \to 4 \to 2 \to 12 \to 1 = T_{1715}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^7 = 1 \to 12 \to 2 \to 4 \to 3 \to 11 \to 8 \to 10 \to 6 \to 5 \to 9 \to 7 \to 13 \to 1 = T_{1476}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^8 = 1 \to 4 \to 8 \to 5 \to 13 \to 2 \to 11 \to 6 \to 7 \to 12 \to 3 \to 10 \to 9 \to 1 = T_{393}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^9 = 1 \to 11 \to 9 \to 2 \to 10 \to 13 \to 3 \to 5 \to 12 \to 8 \to 7 \to 4 \to 6 \to 1 = T_{1407}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^{10} = 1 \to 10 \to 12 \to 6 \to 2 \to 5 \to 4 \to 9 \to 3 \to 7 \to 11 \to 13 \to 8 \to 1 = T_{1176}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^{11} = 1 \to 5 \to 11 \to 12 \to 9 \to 8 \to 2 \to 7 \to 10 \to 4 \to 13 \to 6 \to 3 \to 1 = T_{497}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^{12} = 1 \to 7 \to 5 \to 10 \to 11 \to 4 \to 12 \to 13 \to 9 \to 6 \to 8 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{722}^{(I)}$$
$$(T_8^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

9) $\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})}$ lautet:

$$\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 3 \to 9 \to 6 \to 4 \to 11 \to 13 \to 7 \to 12 \to 8 \to 10 \to 5 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_9^{(\mathrm{I})}$:

$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^2 = 1 \to 3 \to 6 \to 11 \to 7 \to 8 \to 5 \to 2 \to 9 \to 4 \to 13 \to 12 \to 10 \to 1 = \boldsymbol{T}_{224}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^3 = 1 \to 9 \to 11 \to 12 \to 5 \to 3 \to 4 \to 7 \to 10 \to 2 \to 6 \to 13 \to 8 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1068}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^4 = 1 \to 6 \to 7 \to 5 \to 9 \to 13 \to 10 \to 3 \to 11 \to 8 \to 2 \to 4 \to 12 \to 1 = \boldsymbol{T}_{614}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^5 = 1 \to 4 \to 8 \to 3 \to 13 \to 5 \to 6 \to 12 \to 2 \to 11 \to 10 \to 9 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{400}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^6 = 1 \to 11 \to 5 \to 4 \to 10 \to 6 \to 8 \to 9 \to 12 \to 3 \to 7 \to 2 \to 13 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1436}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^7 = 1 \to 13 \to 2 \to 7 \to 3 \to 12 \to 9 \to 8 \to 6 \to 10 \to 4 \to 5 \to 11 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1656}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^8 = 1 \to 7 \to 9 \to 10 \to 11 \to 2 \to 12 \to 6 \to 5 \to 13 \to 3 \to 8 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{850}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^9 = 1 \to 12 \to 4 \to 2 \to 8 \to 11 \to 3 \to 10 \to 13 \to 9 \to 5 \to 7 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1525}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^{10} = 1 \to 8 \to 13 \to 6 \to 2 \to 10 \to 7 \to 4 \to 3 \to 5 \to 12 \to 11 \to 9 \to 1 = \boldsymbol{T}_{958}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^{11} = 1 \to 10 \to 12 \to 13 \to 4 \to 9 \to 2 \to 5 \to 8 \to 7 \to 11 \to 6 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1169}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^{12} = 1 \to 5 \to 10 \to 8 \to 12 \to 7 \to 13 \to 11 \to 4 \to 6 \to 9 \to 3 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{434}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{I})})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

10) $\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})}$ lautet:

$$\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 3 \to 9 \to 7 \to 10 \to 5 \to 13 \to 6 \to 8 \to 12 \to 4 \to 11 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_{10}^{(\mathrm{I})}$:

$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^2 = 1 \to 3 \to 7 \to 5 \to 6 \to 12 \to 11 \to 2 \to 9 \to 10 \to 13 \to 8 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{227}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^3 = 1 \to 9 \to 5 \to 8 \to 11 \to 3 \to 10 \to 6 \to 4 \to 2 \to 7 \to 13 \to 12 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1089}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^4 = 1 \to 7 \to 6 \to 11 \to 9 \to 13 \to 4 \to 3 \to 5 \to 12 \to 2 \to 10 \to 8 \to 1 = \boldsymbol{T}_{814}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^5 = 1 \to 10 \to 12 \to 3 \to 13 \to 11 \to 7 \to 8 \to 2 \to 5 \to 4 \to 9 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1182}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^6 = 1 \to 5 \to 11 \to 10 \to 4 \to 7 \to 12 \to 9 \to 8 \to 3 \to 6 \to 2 \to 13 \to 1 = \boldsymbol{T}_{571}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^7 = 1 \to 13 \to 2 \to 6 \to 3 \to 8 \to 9 \to 12 \to 7 \to 4 \to 10 \to 11 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1647}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^8 = 1 \to 6 \to 9 \to 4 \to 5 \to 2 \to 8 \to 7 \to 11 \to 13 \to 3 \to 12 \to 10 \to 1 = \boldsymbol{T}_{660}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^9 = 1 \to 8 \to 10 \to 2 \to 12 \to 5 \to 3 \to 4 \to 13 \to 9 \to 11 \to 6 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{979}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^{10} = 1 \to 12 \to 13 \to 7 \to 2 \to 4 \to 6 \to 10 \to 3 \to 11 \to 8 \to 5 \to 9 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1477}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^{11} = 1 \to 4 \to 8 \to 13 \to 10 \to 9 \to 2 \to 11 \to 12 \to 6 \to 5 \to 7 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{386}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^{12} = 1 \to 11 \to 4 \to 12 \to 8 \to 6 \to 13 \to 5 \to 10 \to 7 \to 9 \to 3 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1298}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

11) $\boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})}$ lautet:

$$\boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 3 \to 10 \to 11 \to 7 \to 6 \to 12 \to 9 \to 4 \to 5 \to 8 \to 13 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_{11}^{(\mathrm{I})}$:

$$(\boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})})^2 = 1 \to 3 \to 11 \to 6 \to 9 \to 5 \to 13 \to 2 \to 10 \to 7 \to 12 \to 4 \to 8 \to 1 = \boldsymbol{T}_{245}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})})^3 = 1 \to 10 \to 6 \to 4 \to 13 \to 3 \to 7 \to 9 \to 8 \to 2 \to 11 \to 12 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1255}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})})^4 = 1 \to 11 \to 9 \to 13 \to 10 \to 12 \to 8 \to 3 \to 6 \to 5 \to 2 \to 7 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1375}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})})^5 = 1 \to 7 \to 5 \to 3 \to 12 \to 13 \to 11 \to 4 \to 2 \to 6 \to 8 \to 10 \to 9 \to 1 = \boldsymbol{T}_{781}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})})^6 = 1 \to 6 \to 13 \to 7 \to 8 \to 11 \to 5 \to 10 \to 4 \to 3 \to 9 \to 2 \to 12 \to 1 = \boldsymbol{T}_{710}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})})^7 = 1 \to 12 \to 2 \to 9 \to 3 \to 4 \to 10 \to 5 \to 11 \to 8 \to 7 \to 13 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1531}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})})^8 = 1 \to 9 \to 10 \to 8 \to 6 \to 2 \to 4 \to 11 \to 13 \to 12 \to 3 \to 5 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{1045}^{(\mathrm{I})}$$

$$(T_{11}^{(I)})^{9} = 1 \to 4 \to 7 \to 2 \to 5 \to 6 \to 3 \to 8 \to 12 \to 10 \to 13 \to 9 \to 11 \to 1 = T_{312}^{(I)}$$
$$(T_{11}^{(I)})^{10} = 1 \to 5 \to 12 \to 11 \to 2 \to 8 \to 9 \to 7 \to 3 \to 13 \to 4 \to 6 \to 10 \to 1 = T_{519}^{(I)}$$
$$(T_{11}^{(I)})^{11} = 1 \to 8 \to 4 \to 12 \to 7 \to 10 \to 2 \to 13 \to 5 \to 9 \to 6 \to 11 \to 3 \to 1 = T_{995}^{(I)}$$
$$(T_{11}^{(I)})^{12} = 1 \to 13 \to 8 \to 5 \to 4 \to 9 \to 12 \to 6 \to 7 \to 11 \to 10 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{1586}^{(I)}$$
$$(T_{11}^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

12) $T_{12}^{(I)}$ lautet:

$$T_{12}^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 10 \to 5 \to 8 \to 12 \to 6 \to 13 \to 4 \to 11 \to 7 \to 9 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_{12}^{(I)}$:

$$(T_{12}^{(I)})^{2} = 1 \to 3 \to 5 \to 12 \to 13 \to 11 \to 9 \to 2 \to 10 \to 8 \to 6 \to 4 \to 7 \to 1 = T_{240}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{3} = 1 \to 10 \to 12 \to 4 \to 9 \to 3 \to 8 \to 13 \to 7 \to 2 \to 5 \to 6 \to 11 \to 1 = T_{1180}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{4} = 1 \to 5 \to 13 \to 9 \to 10 \to 6 \to 7 \to 3 \to 12 \to 11 \to 2 \to 8 \to 4 \to 1 = T_{516}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{5} = 1 \to 8 \to 11 \to 3 \to 6 \to 9 \to 5 \to 4 \to 2 \to 12 \to 7 \to 10 \to 13 \to 1 = T_{984}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{6} = 1 \to 12 \to 9 \to 8 \to 7 \to 5 \to 11 \to 10 \to 4 \to 3 \to 13 \to 2 \to 6 \to 1 = T_{1496}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{7} = 1 \to 6 \to 2 \to 13 \to 3 \to 4 \to 10 \to 11 \to 5 \to 7 \to 8 \to 9 \to 12 \to 1 = T_{715}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{8} = 1 \to 13 \to 10 \to 7 \to 12 \to 2 \to 4 \to 5 \to 9 \to 6 \to 3 \to 11 \to 8 \to 1 = T_{1627}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{9} = 1 \to 4 \to 8 \to 2 \to 11 \to 12 \to 3 \to 7 \to 6 \to 10 \to 9 \to 13 \to 5 \to 1 = T_{391}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{10} = 1 \to 11 \to 6 \to 5 \to 2 \to 7 \to 13 \to 8 \to 3 \to 9 \to 4 \to 12 \to 10 \to 1 = T_{1379}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{11} = 1 \to 7 \to 4 \to 6 \to 8 \to 10 \to 2 \to 9 \to 11 \to 13 \to 12 \to 5 \to 3 \to 1 = T_{795}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{12} = 1 \to 9 \to 7 \to 11 \to 4 \to 13 \to 6 \to 12 \to 8 \to 5 \to 10 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{1010}^{(I)}$$
$$(T_{12}^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

13) $T_{13}^{(I)}$ lautet:

$$T_{13}^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 12 \to 7 \to 9 \to 13 \to 8 \to 10 \to 5 \to 4 \to 11 \to 6 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_{13}^{(I)}$:

$$(T_{13}^{(I)})^{2} = 1 \to 3 \to 7 \to 13 \to 10 \to 4 \to 6 \to 2 \to 12 \to 9 \to 8 \to 5 \to 11 \to 1 = T_{268}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{3} = 1 \to 12 \to 13 \to 5 \to 6 \to 3 \to 9 \to 10 \to 11 \to 2 \to 7 \to 8 \to 4 \to 1 = T_{1507}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{4} = 1 \to 7 \to 10 \to 6 \to 12 \to 8 \to 11 \to 3 \to 13 \to 4 \to 2 \to 9 \to 5 \to 1 = T_{808}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{5} = 1 \to 9 \to 4 \to 3 \to 8 \to 6 \to 7 \to 5 \to 2 \to 13 \to 11 \to 12 \to 10 \to 1 = T_{1146}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{6} = 1 \to 13 \to 6 \to 9 \to 11 \to 7 \to 4 \to 12 \to 5 \to 3 \to 10 \to 2 \to 8 \to 1 = T_{1669}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{7} = 1 \to 8 \to 2 \to 10 \to 3 \to 5 \to 12 \to 4 \to 7 \to 11 \to 9 \to 6 \to 13 \to 1 = T_{961}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{8} = 1 \to 10 \to 12 \to 11 \to 13 \to 2 \to 5 \to 7 \to 6 \to 8 \to 3 \to 4 \to 9 \to 1 = T_{1172}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{9} = 1 \to 5 \to 9 \to 2 \to 4 \to 13 \to 3 \to 11 \to 8 \to 12 \to 6 \to 10 \to 7 \to 1 = T_{478}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{10} = 1 \to 4 \to 8 \to 7 \to 2 \to 11 \to 10 \to 9 \to 3 \to 6 \to 5 \to 13 \to 12 \to 1 = T_{389}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{11} = 1 \to 11 \to 5 \to 8 \to 9 \to 12 \to 2 \to 6 \to 4 \to 10 \to 13 \to 7 \to 3 \to 1 = T_{1361}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{12} = 1 \to 6 \to 11 \to 4 \to 5 \to 10 \to 8 \to 13 \to 9 \to 7 \to 12 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{577}^{(I)}$$
$$(T_{13}^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

14) $T_{14}^{(I)}$ lautet:

$$T_{14}^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 12 \to 10 \to 11 \to 4 \to 5 \to 6 \to 9 \to 13 \to 8 \to 7 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_{14}^{(I)}$:

$$(T_{14}^{(I)})^{2} = 1 \to 3 \to 10 \to 4 \to 6 \to 13 \to 7 \to 2 \to 12 \to 11 \to 5 \to 9 \to 8 \to 1 = T_{271}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^{3} = 1 \to 12 \to 4 \to 9 \to 7 \to 3 \to 11 \to 6 \to 8 \to 2 \to 10 \to 5 \to 13 \to 1 = T_{1550}^{(I)}$$

$$(T_{14}^{(I)})^4 = 1 \to 10 \to 6 \to 7 \to 12 \to 5 \to 8 \to 3 \to 4 \to 13 \to 2 \to 11 \to 9 \to 1 = T_{1253}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^5 = 1 \to 11 \to 13 \to 3 \to 5 \to 7 \to 10 \to 9 \to 2 \to 4 \to 8 \to 12 \to 6 \to 1 = T_{1334}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^6 = 1 \to 4 \to 7 \to 11 \to 8 \to 10 \to 13 \to 12 \to 9 \to 3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1 = T_{308}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^7 = 1 \to 5 \to 2 \to 6 \to 3 \to 9 \to 12 \to 13 \to 10 \to 8 \to 11 \to 7 \to 4 \to 1 = T_{487}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^8 = 1 \to 6 \to 12 \to 8 \to 4 \to 2 \to 9 \to 10 \to 7 \to 5 \to 3 \to 13 \to 11 \to 1 = T_{680}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^9 = 1 \to 9 \to 11 \to 2 \to 13 \to 4 \to 3 \to 8 \to 5 \to 12 \to 7 \to 6 \to 10 \to 1 = T_{1147}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^{10} = 1 \to 13 \to 5 \to 10 \to 2 \to 8 \to 6 \to 11 \to 3 \to 7 \to 9 \to 4 \to 12 \to 1 = T_{1665}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^{11} = 1 \to 8 \to 9 \to 5 \to 11 \to 12 \to 2 \to 7 \to 13 \to 6 \to 4 \to 10 \to 3 \to 1 = T_{937}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^{12} = 1 \to 7 \to 8 \to 13 \to 9 \to 6 \to 5 \to 4 \to 11 \to 10 \to 12 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{721}^{(I)}$$
$$(T_{14}^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

15) $T_{15}^{(I)}$ lautet:

$$T_{15}^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 13 \to 8 \to 10 \to 11 \to 9 \to 12 \to 7 \to 6 \to 4 \to 5 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_{15}^{(I)}$:

$$(T_{15}^{(I)})^2 = 1 \to 3 \to 8 \to 11 \to 12 \to 6 \to 5 \to 2 \to 13 \to 10 \to 9 \to 7 \to 4 \to 1 = T_{281}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^3 = 1 \to 13 \to 11 \to 7 \to 5 \to 3 \to 10 \to 12 \to 4 \to 2 \to 8 \to 9 \to 6 \to 1 = T_{1666}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^4 = 1 \to 8 \to 12 \to 5 \to 13 \to 9 \to 4 \to 3 \to 11 \to 6 \to 2 \to 10 \to 7 \to 1 = T_{965}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^5 = 1 \to 10 \to 6 \to 3 \to 9 \to 5 \to 8 \to 7 \to 2 \to 11 \to 4 \to 13 \to 12 \to 1 = T_{1262}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^6 = 1 \to 11 \to 5 \to 10 \to 4 \to 8 \to 6 \to 13 \to 7 \to 3 \to 12 \to 2 \to 9 \to 1 = T_{1399}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^7 = 1 \to 9 \to 2 \to 12 \to 3 \to 7 \to 13 \to 6 \to 8 \to 4 \to 10 \to 5 \to 11 \to 1 = T_{1133}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^8 = 1 \to 12 \to 13 \to 4 \to 11 \to 2 \to 7 \to 8 \to 5 \to 9 \to 3 \to 6 \to 10 \to 1 = T_{1504}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^9 = 1 \to 7 \to 10 \to 2 \to 6 \to 11 \to 3 \to 4 \to 9 \to 13 \to 5 \to 12 \to 8 \to 1 = T_{771}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^{10} = 1 \to 6 \to 9 \to 8 \to 2 \to 4 \to 12 \to 10 \to 3 \to 5 \to 7 \to 11 \to 13 \to 1 = T_{606}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^{11} = 1 \to 4 \to 7 \to 9 \to 10 \to 13 \to 2 \to 5 \to 6 \to 12 \to 11 \to 8 \to 3 \to 1 = T_{307}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^{12} = 1 \to 5 \to 4 \to 6 \to 7 \to 12 \to 9 \to 11 \to 10 \to 8 \to 13 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{433}^{(I)}$$
$$(T_{15}^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

16) $T_{16}^{(I)}$ lautet:

$$T_{16}^{(I)} = 1 \to 2 \to 3 \to 13 \to 12 \to 4 \to 5 \to 9 \to 8 \to 6 \to 7 \to 10 \to 11 \to 1$$

und erzeugt die zyklische Gruppe $U_{16}^{(I)}$:

$$(T_{16}^{(I)})^2 = 1 \to 3 \to 12 \to 5 \to 8 \to 7 \to 11 \to 2 \to 13 \to 4 \to 9 \to 6 \to 10 \to 1 = T_{287}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^3 = 1 \to 13 \to 5 \to 6 \to 11 \to 3 \to 4 \to 8 \to 10 \to 2 \to 12 \to 9 \to 7 \to 1 = T_{1716}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^4 = 1 \to 12 \to 8 \to 11 \to 13 \to 9 \to 10 \to 3 \to 5 \to 7 \to 2 \to 4 \to 6 \to 1 = T_{1469}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^5 = 1 \to 4 \to 7 \to 3 \to 9 \to 11 \to 12 \to 6 \to 2 \to 5 \to 10 \to 13 \to 8 \to 1 = T_{314}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^6 = 1 \to 5 \to 11 \to 4 \to 10 \to 12 \to 7 \to 13 \to 6 \to 3 \to 8 \to 2 \to 9 \to 1 = T_{526}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^7 = 1 \to 9 \to 2 \to 8 \to 3 \to 6 \to 13 \to 7 \to 12 \to 10 \to 4 \to 11 \to 5 \to 1 = T_{1100}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^8 = 1 \to 8 \to 13 \to 10 \to 5 \to 2 \to 6 \to 12 \to 11 \to 9 \to 3 \to 7 \to 4 \to 1 = T_{926}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^9 = 1 \to 6 \to 4 \to 2 \to 7 \to 5 \to 3 \to 10 \to 9 \to 13 \to 11 \to 8 \to 12 \to 1 = T_{643}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^{10} = 1 \to 7 \to 9 \to 12 \to 2 \to 10 \to 8 \to 4 \to 3 \to 11 \to 6 \to 5 \to 13 \to 1 = T_{820}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^{11} = 1 \to 10 \to 6 \to 9 \to 4 \to 13 \to 2 \to 11 \to 7 \to 8 \to 5 \to 12 \to 3 \to 1 = T_{1251}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^{12} = 1 \to 11 \to 10 \to 7 \to 6 \to 8 \to 9 \to 5 \to 4 \to 12 \to 13 \to 3 \to 2 \to 1 = T_{1297}^{(I)}$$
$$(T_{16}^{(I)})^{13} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = T^{(VII)}.$$

Für alle übrigen $T_\varkappa$ ($\varkappa = 17, 18, 19, \ldots, 1728$) geben wir jetzt nur mehr die Ergebnisse an. Wir bedienen uns dabei einer abkürzenden Schreibweise, die jeweils das erzeugende Element der $U_\varkappa^{(\mathrm{I})}$ ($\varkappa = 17, 18, \ldots, 144$) explizit, ihre weiteren Elemente implizit angibt.

17) $T_{17}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 9 \to 10 \to 11 \to 8 \to 7 \to 12 \to 13 \to 4 \to 3 \to 1;$

$U_{17}^{(\mathrm{I})} : T_{482}^{(\mathrm{I})}, T_{672}^{(\mathrm{I})}, T_{1110}^{(\mathrm{I})}, T_{1263}^{(\mathrm{I})}, T_{1389}^{(\mathrm{I})}, T_{943}^{(\mathrm{I})}, T_{849}^{(\mathrm{I})}, T_{1577}^{(\mathrm{I})}, T_{1629}^{(\mathrm{I})}, T_{302}^{(\mathrm{I})}, T_{145}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

18) $T_{18}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 13 \to 4 \to 11 \to 6 \to 12 \to 7 \to 9 \to 10 \to 3 \to 1;$

$U_{18}^{(\mathrm{I})} : T_{506}^{(\mathrm{I})}, T_{998}^{(\mathrm{I})}, T_{1623}^{(\mathrm{I})}, T_{399}^{(\mathrm{I})}, T_{1363}^{(\mathrm{I})}, T_{711}^{(\mathrm{I})}, T_{1502}^{(\mathrm{I})}, T_{806}^{(\mathrm{I})}, T_{1114}^{(\mathrm{I})}, T_{1162}^{(\mathrm{I})}, T_{155}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

19) $T_{19}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 13 \to 10 \to 3 \to 4 \to 11 \to 7 \to 6 \to 8 \to 12 \to 9 \to 1;$

$U_{19}^{(\mathrm{I})} : T_{575}^{(\mathrm{I})}, T_{1698}^{(\mathrm{I})}, T_{1159}^{(\mathrm{I})}, T_{168}^{(\mathrm{I})}, T_{395}^{(\mathrm{I})}, T_{1381}^{(\mathrm{I})}, T_{770}^{(\mathrm{I})}, T_{649}^{(\mathrm{I})}, T_{981}^{(\mathrm{I})}, T_{1536}^{(\mathrm{I})}, T_{1019}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

20) $T_{20}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 7 \to 12 \to 8 \to 6 \to 9 \to 10 \to 3 \to 4 \to 11 \to 13 \to 1;$

$U_{20}^{(\mathrm{I})} : T_{504}^{(\mathrm{I})}, T_{854}^{(\mathrm{I})}, T_{1514}^{(\mathrm{I})}, T_{922}^{(\mathrm{I})}, T_{673}^{(\mathrm{I})}, T_{1111}^{(\mathrm{I})}, T_{1164}^{(\mathrm{I})}, T_{169}^{(\mathrm{I})}, T_{390}^{(\mathrm{I})}, T_{1438}^{(\mathrm{I})}, T_{1296}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

21) $T_{21}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 8 \to 12 \to 10 \to 3 \to 6 \to 13 \to 9 \to 7 \to 4 \to 11 \to 1;$

$U_{21}^{(\mathrm{I})} : T_{518}^{(\mathrm{I})}, T_{989}^{(\mathrm{I})}, T_{1545}^{(\mathrm{I})}, T_{1157}^{(\mathrm{I})}, T_{200}^{(\mathrm{I})}, T_{713}^{(\mathrm{I})}, T_{1674}^{(\mathrm{I})}, T_{1084}^{(\mathrm{I})}, T_{750}^{(\mathrm{I})}, T_{396}^{(\mathrm{I})}, T_{1309}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

22) $T_{22}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 13 \to 9 \to 6 \to 8 \to 12 \to 10 \to 11 \to 4 \to 3 \to 7 \to 1;$

$U_{22}^{(\mathrm{I})} : T_{569}^{(\mathrm{I})}, T_{1675}^{(\mathrm{I})}, T_{1071}^{(\mathrm{I})}, T_{662}^{(\mathrm{I})}, T_{988}^{(\mathrm{I})}, T_{1543}^{(\mathrm{I})}, T_{1258}^{(\mathrm{I})}, T_{1339}^{(\mathrm{I})}, T_{298}^{(\mathrm{I})}, T_{207}^{(\mathrm{I})}, T_{723}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

23) $T_{23}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4 \to 3 \to 8 \to 9 \to 13 \to 12 \to 10 \to 11 \to 1;$

$U_{23}^{(\mathrm{I})} : T_{488}^{(\mathrm{I})}, T_{647}^{(\mathrm{I})}, T_{759}^{(\mathrm{I})}, T_{299}^{(\mathrm{I})}, T_{214}^{(\mathrm{I})}, T_{945}^{(\mathrm{I})}, T_{1139}^{(\mathrm{I})}, T_{1719}^{(\mathrm{I})}, T_{1542}^{(\mathrm{I})}, T_{1254}^{(\mathrm{I})}, T_{1299}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

24) $T_{24}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 10 \to 11 \to 12 \to 13 \to 7 \to 8 \to 4 \to 3 \to 9 \to 6 \to 1;$

$U_{24}^{(\mathrm{I})} : T_{535}^{(\mathrm{I})}, T_{1249}^{(\mathrm{I})}, T_{1419}^{(\mathrm{I})}, T_{1574}^{(\mathrm{I})}, T_{1654}^{(\mathrm{I})}, T_{789}^{(\mathrm{I})}, T_{902}^{(\mathrm{I})}, T_{303}^{(\mathrm{I})}, T_{225}^{(\mathrm{I})}, T_{1073}^{(\mathrm{I})}, T_{580}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

25) $T_{25}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 10 \to 3 \to 9 \to 7 \to 13 \to 6 \to 4 \to 11 \to 12 \to 8 \to 1;$

$U_{25}^{(\mathrm{I})} : T_{536}^{(\mathrm{I})}, T_{1168}^{(\mathrm{I})}, T_{223}^{(\mathrm{I})}, T_{1081}^{(\mathrm{I})}, T_{862}^{(\mathrm{I})}, T_{1648}^{(\mathrm{I})}, T_{610}^{(\mathrm{I})}, T_{385}^{(\mathrm{I})}, T_{1418}^{(\mathrm{I})}, T_{1517}^{(\mathrm{I})}, T_{874}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

26) $T_{26}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 12 \to 4 \to 11 \to 10 \to 3 \to 9 \to 6 \to 8 \to 13 \to 7 \to 1;$

$U_{26}^{(\mathrm{I})} : T_{564}^{(\mathrm{I})}, T_{1471}^{(\mathrm{I})}, T_{398}^{(\mathrm{I})}, T_{1409}^{(\mathrm{I})}, T_{1153}^{(\mathrm{I})}, T_{218}^{(\mathrm{I})}, T_{1070}^{(\mathrm{I})}, T_{661}^{(\mathrm{I})}, T_{996}^{(\mathrm{I})}, T_{1655}^{(\mathrm{I})}, T_{733}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

27) $T_{27}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 9 \to 4 \to 3 \to 10 \to 11 \to 12 \to 8 \to 6 \to 7 \to 13 \to 1;$

$U_{27}^{(\mathrm{I})} : T_{527}^{(\mathrm{I})}, T_{1054}^{(\mathrm{I})}, T_{293}^{(\mathrm{I})}, T_{243}^{(\mathrm{I})}, T_{1257}^{(\mathrm{I})}, T_{1430}^{(\mathrm{I})}, T_{1513}^{(\mathrm{I})}, T_{921}^{(\mathrm{I})}, T_{638}^{(\mathrm{I})}, T_{860}^{(\mathrm{I})}, T_{1587}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

28) $T_{28}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 12 \to 7 \to 6 \to 8 \to 13 \to 4 \to 3 \to 10 \to 11 \to 9 \to 1;$

$U_{28}^{(\mathrm{I})} : T_{567}^{(\mathrm{I})}, T_{1508}^{(\mathrm{I})}, T_{769}^{(\mathrm{I})}, T_{650}^{(\mathrm{I})}, T_{1000}^{(\mathrm{I})}, T_{1630}^{(\mathrm{I})}, T_{291}^{(\mathrm{I})}, T_{242}^{(\mathrm{I})}, T_{1259}^{(\mathrm{I})}, T_{1400}^{(\mathrm{I})}, T_{1012}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

29) $T_{29}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 9 \to 13 \to 8 \to 6 \to 7 \to 4 \to 11 \to 10 \to 3 \to 12 \to 1;$

$U_{29}^{(\mathrm{I})} : T_{521}^{(\mathrm{I})}, T_{1140}^{(\mathrm{I})}, T_{1660}^{(\mathrm{I})}, T_{928}^{(\mathrm{I})}, T_{648}^{(\mathrm{I})}, T_{749}^{(\mathrm{I})}, T_{388}^{(\mathrm{I})}, T_{1411}^{(\mathrm{I})}, T_{1156}^{(\mathrm{I})}, T_{272}^{(\mathrm{I})}, T_{1453}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

30) $T_{30}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3 \to 13 \to 12 \to 9 \to 8 \to 10 \to 11 \to 7 \to 6 \to 1;$

$U_{30}^{(\mathrm{I})} : T_{480}^{(\mathrm{I})}, T_{296}^{(\mathrm{I})}, T_{280}^{(\mathrm{I})}, T_{1724}^{(\mathrm{I})}, T_{1535}^{(\mathrm{I})}, T_{1101}^{(\mathrm{I})}, T_{962}^{(\mathrm{I})}, T_{1250}^{(\mathrm{I})}, T_{1370}^{(\mathrm{I})}, T_{772}^{(\mathrm{I})}, T_{579}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

31) $T_{31}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 7 \to 10 \to 11 \to 4 \to 3 \to 13 \to 8 \to 6 \to 9 \to 12 \to 1;$

$U_{31}^{(\mathrm{I})} : T_{501}^{(\mathrm{I})}, T_{815}^{(\mathrm{I})}, T_{1261}^{(\mathrm{I})}, T_{1340}^{(\mathrm{I})}, T_{290}^{(\mathrm{I})}, T_{274}^{(\mathrm{I})}, T_{1661}^{(\mathrm{I})}, T_{925}^{(\mathrm{I})}, T_{675}^{(\mathrm{I})}, T_{1136}^{(\mathrm{I})}, T_{1444}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

32) $T_{32}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 11 \to 7 \to 9 \to 12 \to 6 \to 10 \to 3 \to 13 \to 8 \to 1;$

$U_{32}^{(\mathrm{I})} : T_{474}^{(\mathrm{I})}, T_{387}^{(\mathrm{I})}, T_{1369}^{(\mathrm{I})}, T_{797}^{(\mathrm{I})}, T_{1131}^{(\mathrm{I})}, T_{1495}^{(\mathrm{I})}, T_{689}^{(\mathrm{I})}, T_{1163}^{(\mathrm{I})}, T_{286}^{(\mathrm{I})}, T_{1662}^{(\mathrm{I})}, T_{873}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

33) $T_{33}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 6 \to 12 \to 11 \to 5 \to 8 \to 13 \to 10 \to 9 \to 4 \to 7 \to 3 \to 1;$

$U_{33}^{(\mathrm{I})} : T_{706}^{(\mathrm{I})}, T_{1557}^{(\mathrm{I})}, T_{1357}^{(\mathrm{I})}, T_{515}^{(\mathrm{I})}, T_{999}^{(\mathrm{I})}, T_{1703}^{(\mathrm{I})}, T_{1247}^{(\mathrm{I})}, T_{1053}^{(\mathrm{I})}, T_{346}^{(\mathrm{I})}, T_{739}^{(\mathrm{I})}, T_{151}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

34) $T_{34}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 6 \to 13 \to 4 \to 9 \to 10 \to 7 \to 11 \to 5 \to 8 \to 12 \to 3 \to 1;$

$U_{34}^{(\mathrm{I})} : T_{714}^{(\mathrm{I})}, T_{1622}^{(\mathrm{I})}, T_{383}^{(\mathrm{I})}, T_{1108}^{(\mathrm{I})}, T_{1211}^{(\mathrm{I})}, T_{836}^{(\mathrm{I})}, T_{1351}^{(\mathrm{I})}, T_{514}^{(\mathrm{I})}, T_{980}^{(\mathrm{I})}, T_{1461}^{(\mathrm{I})}, T_{159}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

35) $T_{35}^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 3 \to 4 \to 7 \to 8 \to 11 \to 12 \to 13 \to 10 \to 9 \to 1;$

$U_{35}^{(\mathrm{I})} : T_{621}^{(\mathrm{I})}, T_{456}^{(\mathrm{I})}, T_{175}^{(\mathrm{I})}, T_{352}^{(\mathrm{I})}, T_{792}^{(\mathrm{I})}, T_{974}^{(\mathrm{I})}, T_{1427}^{(\mathrm{I})}, T_{1571}^{(\mathrm{I})}, T_{1691}^{(\mathrm{I})}, T_{1239}^{(\mathrm{I})}, T_{1013}^{(\mathrm{I})}, T^{(\mathrm{VII})}.$

36) $T_{36}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 8 \to 13 \to 10 \to 7 \to 5 \to 12 \to 11 \to 3 \to 4 \to 9 \to 1;$
$U_{36}^{(I)} : T_{654}^{(I)}, T_{994}^{(I)}, T_{1690}^{(I)}, T_{1203}^{(I)}, T_{764}^{(I)}, T_{568}^{(I)}, T_{1564}^{(I)}, T_{1317}^{(I)}, T_{165}^{(I)}, T_{382}^{(I)}, T_{1021}^{(I)}, T^{(VII)}.$

37) $T_{37}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 11 \to 12 \to 8 \to 5 \to 3 \to 4 \to 9 \to 10 \to 7 \to 13 \to 1;$
$U_{37}^{(I)} : T_{703}^{(I)}, T_{1428}^{(I)}, T_{1521}^{(I)}, T_{917}^{(I)}, T_{449}^{(I)}, T_{162}^{(I)}, T_{378}^{(I)}, T_{1120}^{(I)}, T_{1215}^{(I)}, T_{859}^{(I)}, T_{1589}^{(I)}, T^{(VII)}.$

38) $T_{38}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 4 \to 7 \to 12 \to 13 \to 11 \to 8 \to 10 \to 9 \to 3 \to 5 \to 1;$
$U_{38}^{(I)} : T_{601}^{(I)}, T_{339}^{(I)}, T_{848}^{(I)}, T_{1573}^{(I)}, T_{1708}^{(I)}, T_{1391}^{(I)}, T_{968}^{(I)}, T_{1246}^{(I)}, T_{1034}^{(I)}, T_{188}^{(I)}, T_{437}^{(I)}, T^{(VII)}.$

39) $T_{39}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 12 \to 10 \to 7 \to 4 \to 9 \to 3 \to 5 \to 8 \to 13 \to 11 \to 1;$
$U_{39}^{(I)} : T_{709}^{(I)}, T_{1552}^{(I)}, T_{1213}^{(I)}, T_{746}^{(I)}, T_{371}^{(I)}, T_{1028}^{(I)}, T_{192}^{(I)}, T_{513}^{(I)}, T_{1003}^{(I)}, T_{1705}^{(I)}, T_{1306}^{(I)}, T^{(VII)}.$

40) $T_{40}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 13 \to 3 \to 5 \to 8 \to 12 \to 4 \to 7 \to 10 \to 9 \to 11 \to 1;$
$U_{40}^{(I)} : T_{717}^{(I)}, T_{1614}^{(I)}, T_{178}^{(I)}, T_{510}^{(I)}, T_{990}^{(I)}, T_{1473}^{(I)}, T_{351}^{(I)}, T_{810}^{(I)}, T_{1236}^{(I)}, T_{1121}^{(I)}, T_{1310}^{(I)}, T^{(VII)}.$

41) $T_{41}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 10 \to 9 \to 13 \to 12 \to 3 \to 8 \to 4 \to 7 \to 11 \to 5 \to 1;$
$U_{41}^{(I)} : T_{685}^{(I)}, T_{1243}^{(I)}, T_{1150}^{(I)}, T_{1718}^{(I)}, T_{1458}^{(I)}, T_{210}^{(I)}, T_{896}^{(I)}, T_{348}^{(I)}, T_{831}^{(I)}, T_{1359}^{(I)}, T_{445}^{(I)}, T^{(VII)}.$

42) $T_{42}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 3 \to 10 \to 9 \to 4 \to 7 \to 12 \to 8 \to 5 \to 11 \to 13 \to 1;$
$U_{42}^{(I)} : T_{598}^{(I)}, T_{236}^{(I)}, T_{1241}^{(I)}, T_{1056}^{(I)}, T_{344}^{(I)}, T_{846}^{(I)}, T_{1527}^{(I)}, T_{920}^{(I)}, T_{548}^{(I)}, T_{1434}^{(I)}, T_{1592}^{(I)}, T^{(VII)}.$

43) $T_{43}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 4 \to 9 \to 3 \to 11 \to 13 \to 5 \to 10 \to 7 \to 12 \to 8 \to 1;$
$U_{43}^{(I)} : T_{616}^{(I)}, T_{375}^{(I)}, T_{1038}^{(I)}, T_{256}^{(I)}, T_{1439}^{(I)}, T_{1636}^{(I)}, T_{529}^{(I)}, T_{1204}^{(I)}, T_{847}^{(I)}, T_{1515}^{(I)}, T_{870}^{(I)}, T^{(VII)}.$

44) $T_{44}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 8 \to 12 \to 4 \to 9 \to 5 \to 13 \to 3 \to 11 \to 10 \to 7 \to 1;$
$U_{44}^{(I)} : T_{656}^{(I)}, T_{986}^{(I)}, T_{1467}^{(I)}, T_{372}^{(I)}, T_{1060}^{(I)}, T_{572}^{(I)}, T_{1616}^{(I)}, T_{250}^{(I)}, T_{1415}^{(I)}, T_{1206}^{(I)}, T_{735}^{(I)}, T^{(VII)}.$

45) $T_{45}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 10 \to 7 \to 11 \to 3 \to 12 \to 5 \to 4 \to 9 \to 13 \to 8 \to 1;$
$U_{45}^{(I)} : T_{688}^{(I)}, T_{1205}^{(I)}, T_{830}^{(I)}, T_{1328}^{(I)}, T_{270}^{(I)}, T_{1482}^{(I)}, T_{468}^{(I)}, T_{379}^{(I)}, T_{1148}^{(I)}, T_{1663}^{(I)}, T_{875}^{(I)}, T^{(VII)}.$

46) $T_{46}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 11 \to 4 \to 7 \to 10 \to 9 \to 13 \to 8 \to 5 \to 3 \to 12 \to 1;$
$U_{46}^{(I)} : T_{698}^{(I)}, T_{1332}^{(I)}, T_{342}^{(I)}, T_{821}^{(I)}, T_{1238}^{(I)}, T_{1145}^{(I)}, T_{1668}^{(I)}, T_{910}^{(I)}, T_{464}^{(I)}, T_{269}^{(I)}, T_{1446}^{(I)}, T^{(VII)}.$

47) $T_{47}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 3 \to 13 \to 8 \to 5 \to 11 \to 10 \to 7 \to 4 \to 9 \to 12 \to 1;$
$U_{47}^{(I)} : T_{597}^{(I)}, T_{276}^{(I)}, T_{1671}^{(I)}, T_{914}^{(I)}, T_{552}^{(I)}, T_{1406}^{(I)}, T_{1210}^{(I)}, T_{760}^{(I)}, T_{370}^{(I)}, T_{1129}^{(I)}, T_{1448}^{(I)}, T^{(VII)}.$

48) $T_{48}^{(I)} = 1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 11 \to 10 \to 9 \to 8 \to 3 \to 13 \to 12 \to 4 \to 7 \to 1;$
$U_{48}^{(I)} : T_{629}^{(I)}, T_{549}^{(I)}, T_{1412}^{(I)}, T_{1233}^{(I)}, T_{1007}^{(I)}, T_{885}^{(I)}, T_{277}^{(I)}, T_{1726}^{(I)}, T_{1474}^{(I)}, T_{345}^{(I)}, T_{727}^{(I)}, T^{(VII)}.$

49) $T_{49}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 8 \to 5 \to 11 \to 12 \to 13 \to 4 \to 9 \to 10 \to 6 \to 3 \to 1;$
$U_{49}^{(I)} : T_{786}^{(I)}, T_{906}^{(I)}, T_{553}^{(I)}, T_{1422}^{(I)}, T_{1583}^{(I)}, T_{1632}^{(I)}, T_{384}^{(I)}, T_{1109}^{(I)}, T_{1197}^{(I)}, T_{599}^{(I)}, T_{150}^{(I)}, T^{(VII)}.$

50) $T_{50}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 13 \to 10 \to 9 \to 4 \to 6 \to 5 \to 11 \to 12 \to 8 \to 3 \to 1;$
$U_{50}^{(I)} : T_{858}^{(I)}, T_{1699}^{(I)}, T_{1248}^{(I)}, T_{1052}^{(I)}, T_{329}^{(I)}, T_{617}^{(I)}, T_{550}^{(I)}, T_{1423}^{(I)}, T_{1528}^{(I)}, T_{887}^{(I)}, T_{153}^{(I)}, T^{(VII)}.$

51) $T_{51}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 3 \to 4 \to 9 \to 10 \to 6 \to 8 \to 12 \to 11 \to 5 \to 13 \to 1;$
$U_{51}^{(I)} : T_{741}^{(I)}, T_{172}^{(I)}, T_{377}^{(I)}, T_{1117}^{(I)}, T_{1199}^{(I)}, T_{657}^{(I)}, T_{982}^{(I)}, T_{1565}^{(I)}, T_{1345}^{(I)}, T_{570}^{(I)}, T_{1593}^{(I)}, T^{(VII)}.$

52) $T_{52}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 12 \to 8 \to 10 \to 9 \to 11 \to 13 \to 3 \to 5 \to 4 \to 6 \to 1;$
$U_{52}^{(I)} : T_{843}^{(I)}, T_{1518}^{(I)}, T_{954}^{(I)}, T_{1235}^{(I)}, T_{1124}^{(I)}, T_{1440}^{(I)}, T_{1610}^{(I)}, T_{190}^{(I)}, T_{476}^{(I)}, T_{335}^{(I)}, T_{591}^{(I)}, T^{(VII)}.$

53) $T_{53}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 10 \to 9 \to 3 \to 5 \to 13 \to 11 \to 4 \to 6 \to 8 \to 12 \to 1;$
$U_{53}^{(I)} : T_{824}^{(I)}, T_{1245}^{(I)}, T_{1025}^{(I)}, T_{180}^{(I)}, T_{573}^{(I)}, T_{1712}^{(I)}, T_{1329}^{(I)}, T_{322}^{(I)}, T_{653}^{(I)}, T_{991}^{(I)}, T_{1451}^{(I)}, T^{(VII)}.$

54) $T_{54}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 5 \to 10 \to 6 \to 4 \to 9 \to 13 \to 12 \to 11 \to 3 \to 8 \to 1;$
$U_{54}^{(I)} : T_{762}^{(I)}, T_{533}^{(I)}, T_{1194}^{(I)}, T_{608}^{(I)}, T_{381}^{(I)}, T_{1144}^{(I)}, T_{1713}^{(I)}, T_{1561}^{(I)}, T_{1327}^{(I)}, T_{215}^{(I)}, T_{876}^{(I)}, T^{(VII)}.$

55) $T_{55}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 3 \to 8 \to 11 \to 10 \to 9 \to 13 \to 12 \to 1;$
$U_{55}^{(I)} : T_{756}^{(I)}, T_{333}^{(I)}, T_{624}^{(I)}, T_{463}^{(I)}, T_{216}^{(I)}, T_{970}^{(I)}, T_{1405}^{(I)}, T_{1240}^{(I)}, T_{1141}^{(I)}, T_{1721}^{(I)}, T_{1447}^{(I)}, T^{(VII)}.$

56) $T_{56}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 12 \to 13 \to 4 \to 6 \to 11 \to 8 \to 5 \to 3 \to 10 \to 9 \to 1;$
$U_{56}^{(I)} : T_{852}^{(I)}, T_{1570}^{(I)}, T_{1617}^{(I)}, T_{327}^{(I)}, T_{704}^{(I)}, T_{1392}^{(I)}, T_{905}^{(I)}, T_{452}^{(I)}, T_{246}^{(I)}, T_{1244}^{(I)}, T_{1014}^{(I)}, T^{(VII)}.$

57) $T_{57}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 11 \to 3 \to 10 \to 6 \to 12 \to 5 \to 8 \to 13 \to 4 \to 9 \to 1;$
$U_{57}^{(I)} : T_{826}^{(I)}, T_{1324}^{(I)}, T_{241}^{(I)}, T_{1195}^{(I)}, T_{712}^{(I)}, T_{1483}^{(I)}, T_{511}^{(I)}, T_{993}^{(I)}, T_{1619}^{(I)}, T_{380}^{(I)}, T_{1023}^{(I)}, T^{(VII)}.$

58) $T_{58}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 5 \to 8 \to 12 \to 11 \to 3 \to 10 \to 9 \to 4 \to 6 \to 13 \to 1;$
$U_{58}^{(I)} : T_{765}^{(I)}, T_{503}^{(I)}, T_{983}^{(I)}, T_{1567}^{(I)}, T_{1313}^{(I)}, T_{234}^{(I)}, T_{1242}^{(I)}, T_{1046}^{(I)}, T_{328}^{(I)}, T_{720}^{(I)}, T_{1597}^{(I)}, T^{(VII)}.$

59) $T_{59}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 13 \to 3 \to 11 \to 12 \to 8 \to 10 \to 6 \to 4 \to 9 \to 5 \to 1;$
$U_{59}^{(I)} : T_{863}^{(I)}, T_{1609}^{(I)}, T_{259}^{(I)}, T_{1424}^{(I)}, T_{1516}^{(I)}, T_{964}^{(I)}, T_{1190}^{(I)}, T_{603}^{(I)}, T_{373}^{(I)}, T_{1062}^{(I)}, T_{446}^{(I)}, T^{(VII)}.$

60) $T_{60}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 10 \to 6 \to 8 \to 13 \to 5 \to 12 \to 4 \to 9 \to 3 \to 11 \to 1;$
$U_{60}^{(I)} : T_{811}^{(I)}, T_{1186}^{(I)}, T_{652}^{(I)}, T_{1006}^{(I)}, T_{1634}^{(I)}, T_{565}^{(I)}, T_{1480}^{(I)}, T_{374}^{(I)}, T_{1039}^{(I)}, T_{249}^{(I)}, T_{1308}^{(I)}, T^{(VII)}.$

61) $T_{61}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 8 \to 4 \to 6 \to 10 \to 9 \to 3 \to 11 \to 12 \to 13 \to 5 \to 1;$
$U_{61}^{(I)} : T_{791}^{(I)}, T_{903}^{(I)}, T_{326}^{(I)}, T_{682}^{(I)}, T_{1237}^{(I)}, T_{1032}^{(I)}, T_{257}^{(I)}, T_{1420}^{(I)}, T_{1576}^{(I)}, T_{1638}^{(I)}, T_{438}^{(I)}, T^{(VII)}.$

62) $T_{62}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 4 \to 9 \to 13 \to 8 \to 3 \to 12 \to 10 \to 6 \to 5 \to 11 \to 1;$
$U_{62}^{(I)} : T_{753}^{(I)}, T_{376}^{(I)}, T_{1142}^{(I)}, T_{1672}^{(I)}, T_{882}^{(I)}, T_{265}^{(I)}, T_{1546}^{(I)}, T_{1189}^{(I)}, T_{622}^{(I)}, T_{560}^{(I)}, T_{1305}^{(I)}, T^{(VII)}.$

63) $T_{63}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 11 \to 5 \to 4 \to 9 \to 12 \to 3 \to 13 \to 8 \to 10 \to 6 \to 1;$
$U_{63}^{(I)} : T_{827}^{(I)}, T_{1356}^{(I)}, T_{473}^{(I)}, T_{369}^{(I)}, T_{1130}^{(I)}, T_{1460}^{(I)}, T_{285}^{(I)}, T_{1658}^{(I)}, T_{957}^{(I)}, T_{1198}^{(I)}, T_{589}^{(I)}, T^{(VII)}.$

64) $T_{64}^{(I)} = 1 \to 2 \to 7 \to 3 \to 13 \to 12 \to 11 \to 5 \to 4 \to 6 \to 10 \to 9 \to 8 \to 1;$
$U_{64}^{(I)} : T_{743}^{(I)}, T_{284}^{(I)}, T_{1717}^{(I)}, T_{1553}^{(I)}, T_{1350}^{(I)}, T_{477}^{(I)}, T_{332}^{(I)}, T_{692}^{(I)}, T_{1234}^{(I)}, T_{1098}^{(I)}, T_{868}^{(I)}, T^{(VII)}.$

65) $T_{65}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 9 \to 10 \to 13 \to 4 \to 12 \to 11 \to 5 \to 6 \to 7 \to 3 \to 1;$
$U_{65}^{(I)} : T_{946}^{(I)}, T_{1115}^{(I)}, T_{1294}^{(I)}, T_{1625}^{(I)}, T_{414}^{(I)}, T_{1555}^{(I)}, T_{1358}^{(I)}, T_{492}^{(I)}, T_{639}^{(I)}, T_{740}^{(I)}, T_{152}^{(I)}, T^{(VII)}.$

66) $T_{66}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 7 \to 11 \to 5 \to 6 \to 9 \to 4 \to 13 \to 10 \to 12 \to 3 \to 1;$
$U_{66}^{(I)} : T_{938}^{(I)}, T_{829}^{(I)}, T_{1352}^{(I)}, T_{493}^{(I)}, T_{670}^{(I)}, T_{1047}^{(I)}, T_{424}^{(I)}, T_{1692}^{(I)}, T_{1280}^{(I)}, T_{1463}^{(I)}, T_{160}^{(I)}, T^{(VII)}.$

67) $T_{67}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 3 \to 4 \to 13 \to 10 \to 12 \to 7 \to 6 \to 5 \to 11 \to 9 \to 1;$
$U_{67}^{(I)} : T_{888}^{(I)}, T_{171}^{(I)}, T_{429}^{(I)}, T_{1697}^{(I)}, T_{1271}^{(I)}, T_{1500}^{(I)}, T_{777}^{(I)}, T_{625}^{(I)}, T_{347}^{(I)}, T_{1394}^{(I)}, T_{1018}^{(I)}, T^{(VII)}.$

68) $T_{68}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 10 \to 12 \to 7 \to 9 \to 11 \to 6 \to 4 \to 13 \to 3 \to 5 \to 1;$
$U_{68}^{(I)} : T_{955}^{(I)}, T_{1266}^{(I)}, T_{1506}^{(I)}, T_{800}^{(I)}, T_{1127}^{(I)}, T_{1366}^{(I)}, T_{611}^{(I)}, T_{428}^{(I)}, T_{1605}^{(I)}, T_{179}^{(I)}, T_{447}^{(I)}, T^{(VII)}.$

69) $T_{69}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 9 \to 3 \to 5 \to 6 \to 7 \to 10 \to 12 \to 4 \to 13 \to 11 \to 1;$
$U_{69}^{(I)} : T_{948}^{(I)}, T_{1033}^{(I)}, T_{189}^{(I)}, T_{495}^{(I)}, T_{636}^{(I)}, T_{823}^{(I)}, T_{1276}^{(I)}, T_{1466}^{(I)}, T_{420}^{(I)}, T_{1709}^{(I)}, T_{1307}^{(I)}, T^{(VII)}.$

70) $T_{70}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 7 \to 4 \to 12 \to 10 \to 13 \to 3 \to 5 \to 6 \to 9 \to 11 \to 1;$
$U_{70}^{(I)} : T_{940}^{(I)}, T_{751}^{(I)}, T_{411}^{(I)}, T_{1538}^{(I)}, T_{1284}^{(I)}, T_{1608}^{(I)}, T_{184}^{(I)}, T_{484}^{(I)}, T_{678}^{(I)}, T_{1125}^{(I)}, T_{1311}^{(I)}, T^{(VII)}.$

71) $T_{71}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 4 \to 13 \to 9 \to 7 \to 3 \to 6 \to 10 \to 12 \to 11 \to 5 \to 1;$
$U_{71}^{(I)} : T_{900}^{(I)}, T_{432}^{(I)}, T_{1686}^{(I)}, T_{1082}^{(I)}, T_{737}^{(I)}, T_{193}^{(I)}, T_{690}^{(I)}, T_{1269}^{(I)}, T_{1568}^{(I)}, T_{1355}^{(I)}, T_{436}^{(I)}, T^{(VII)}.$

72) $T_{72}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 4 \to 12 \to 11 \to 3 \to 7 \to 5 \to 10 \to 13 \to 9 \to 6 \to 1;$
$U_{72}^{(I)} : T_{892}^{(I)}, T_{410}^{(I)}, T_{1566}^{(I)}, T_{1322}^{(I)}, T_{205}^{(I)}, T_{761}^{(I)}, T_{532}^{(I)}, T_{1292}^{(I)}, T_{1677}^{(I)}, T_{1080}^{(I)}, T_{588}^{(I)}, T^{(VII)}.$

73) $T_{73}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 11 \to 10 \to 12 \to 4 \to 13 \to 9 \to 6 \to 5 \to 3 \to 7 \to 1;$
$U_{73}^{(I)} : T_{969}^{(I)}, T_{1404}^{(I)}, T_{1273}^{(I)}, T_{1475}^{(I)}, T_{426}^{(I)}, T_{1688}^{(I)}, T_{1067}^{(I)}, T_{632}^{(I)}, T_{459}^{(I)}, T_{206}^{(I)}, T_{725}^{(I)}, T^{(VII)}.$

74) $T_{74}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 5 \to 11 \to 4 \to 13 \to 6 \to 3 \to 9 \to 7 \to 10 \to 12 \to 1;$
$U_{74}^{(I)} : T_{907}^{(I)}, T_{557}^{(I)}, T_{1341}^{(I)}, T_{418}^{(I)}, T_{1641}^{(I)}, T_{596}^{(I)}, T_{221}^{(I)}, T_{1093}^{(I)}, T_{813}^{(I)}, T_{1279}^{(I)}, T_{1449}^{(I)}, T^{(VII)}.$

75) $T_{75}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 3 \to 9 \to 6 \to 5 \to 11 \to 4 \to 12 \to 10 \to 13 \to 7 \to 1;$
$U_{75}^{(I)} : T_{884}^{(I)}, T_{220}^{(I)}, T_{1077}^{(I)}, T_{619}^{(I)}, T_{558}^{(I)}, T_{1338}^{(I)}, T_{413}^{(I)}, T_{1544}^{(I)}, T_{1281}^{(I)}, T_{1649}^{(I)}, T_{728}^{(I)}, T^{(VII)}.$

76) $T_{76}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 11 \to 7 \to 6 \to 5 \to 3 \to 10 \to 13 \to 4 \to 12 \to 9 \to 1;$
$U_{76}^{(I)} : T_{976}^{(I)}, T_{1372}^{(I)}, T_{782}^{(I)}, T_{623}^{(I)}, T_{450}^{(I)}, T_{233}^{(I)}, T_{1290}^{(I)}, T_{1626}^{(I)}, T_{407}^{(I)}, T_{1532}^{(I)}, T_{1015}^{(I)}, T^{(VII)}.$

77) $T_{77}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 6 \to 9 \to 4 \to 12 \to 5 \to 7 \to 11 \to 3 \to 10 \to 13 \to 1;$
$U_{77}^{(I)} : T_{936}^{(I)}, T_{667}^{(I)}, T_{1042}^{(I)}, T_{408}^{(I)}, T_{1484}^{(I)}, T_{502}^{(I)}, T_{825}^{(I)}, T_{1326}^{(I)}, T_{239}^{(I)}, T_{1289}^{(I)}, T_{1599}^{(I)}, T^{(VII)}.$

78) $T_{78}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 5 \to 3 \to 10 \to 12 \to 6 \to 11 \to 7 \to 9 \to 4 \to 13 \to 1;$

$U_{78}^{(I)}: T_{916}^{(I)}, T_{453}^{(I)}, T_{244}^{(I)}, T_{1272}^{(I)}, T_{1494}^{(I)}, T_{699}^{(I)}, T_{1384}^{(I)}, T_{794}^{(I)}, T_{1041}^{(I)}, T_{423}^{(I)}, T_{1591}^{(I)}, T^{(VII)}.$

79) $T_{79}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 10 \to 13 \to 3 \to 11 \to 9 \to 5 \to 4 \to 12 \to 7 \to 6 \to 1;$

$U_{79}^{(I)}: T_{963}^{(I)}, T_{1288}^{(I)}, T_{1602}^{(I)}, T_{264}^{(I)}, T_{1397}^{(I)}, T_{1059}^{(I)}, T_{466}^{(I)}, T_{402}^{(I)}, T_{1505}^{(I)}, T_{776}^{(I)}, T_{592}^{(I)}, T^{(VII)}.$

80) $T_{80}^{(I)} = 1 \to 2 \to 8 \to 6 \to 7 \to 10 \to 13 \to 5 \to 9 \to 3 \to 11 \to 4 \to 12 \to 1$

$U_{80}^{(I)}: T_{923}^{(I)}, T_{646}^{(I)}, T_{809}^{(I)}, T_{1285}^{(I)}, T_{1635}^{(I)}, T_{523}^{(I)}, T_{1031}^{(I)}, T_{261}^{(I)}, T_{1343}^{(I)}, T_{405}^{(I)}, T_{1452}^{(I)}, T^{(VII)}.$

81) $T_{81}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 10 \to 7 \to 12 \to 8 \to 11 \to 13 \to 4 \to 6 \to 5 \to 3 \to 1;$

$U_{81}^{(I)}: T_{1105}^{(I)}, T_{1209}^{(I)}, T_{853}^{(I)}, T_{1522}^{(I)}, T_{975}^{(I)}, T_{1437}^{(I)}, T_{1628}^{(I)}, T_{336}^{(I)}, T_{620}^{(I)}, T_{454}^{(I)}, T_{147}^{(I)}, T^{(VII)}.$

82) $T_{82}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 4 \to 6 \to 8 \to 12 \to 5 \to 13 \to 10 \to 7 \to 11 \to 3 \to 1;$

$U_{82}^{(I)}: T_{1043}^{(I)}, T_{330}^{(I)}, T_{651}^{(I)}, T_{985}^{(I)}, T_{1487}^{(I)}, T_{576}^{(I)}, T_{1695}^{(I)}, T_{1216}^{(I)}, T_{834}^{(I)}, T_{1318}^{(I)}, T_{157}^{(I)}, T^{(VII)}.$

83) $T_{83}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 10 \to 6 \to 5 \to 11 \to 8 \to 3 \to 4 \to 7 \to 12 \to 13 \to 1;$

$U_{83}^{(I)}: T_{1113}^{(I)}, T_{1200}^{(I)}, T_{630}^{(I)}, T_{545}^{(I)}, T_{1386}^{(I)}, T_{886}^{(I)}, T_{173}^{(I)}, T_{340}^{(I)}, T_{845}^{(I)}, T_{1584}^{(I)}, T_{1594}^{(I)}, T^{(VII)}.$

84) $T_{84}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 3 \to 5 \to 10 \to 7 \to 13 \to 11 \to 12 \to 8 \to 4 \to 6 \to 1;$

$U_{84}^{(I)}: T_{1036}^{(I)}, T_{183}^{(I)}, T_{544}^{(I)}, T_{1214}^{(I)}, T_{864}^{(I)}, T_{1710}^{(I)}, T_{1421}^{(I)}, T_{1519}^{(I)}, T_{890}^{(I)}, T_{323}^{(I)}, T_{583}^{(I)}, T^{(VII)}.$

85) $T_{85}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 11 \to 12 \to 13 \to 3 \to 5 \to 10 \to 6 \to 4 \to 7 \to 8 \to 1;$

$U_{85}^{(I)}: T_{1126}^{(I)}, T_{1425}^{(I)}, T_{1572}^{(I)}, T_{1606}^{(I)}, T_{186}^{(I)}, T_{530}^{(I)}, T_{1187}^{(I)}, T_{612}^{(I)}, T_{350}^{(I)}, T_{790}^{(I)}, T_{880}^{(I)}, T^{(VII)}.$

86) $T_{86}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 11 \to 10 \to 7 \to 4 \to 6 \to 8 \to 13 \to 3 \to 5 \to 12 \to 1;$

$U_{86}^{(I)}: T_{1128}^{(I)}, T_{1401}^{(I)}, T_{1202}^{(I)}, T_{752}^{(I)}, T_{334}^{(I)}, T_{655}^{(I)}, T_{1002}^{(I)}, T_{1603}^{(I)}, T_{182}^{(I)}, T_{566}^{(I)}, T_{1454}^{(I)}, T^{(VII)}.$

87) $T_{87}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 13 \to 12 \to 10 \to 6 \to 3 \to 8 \to 5 \to 11 \to 4 \to 7 \to 1;$

$U_{87}^{(I)}: T_{1143}^{(I)}, T_{1727}^{(I)}, T_{1541}^{(I)}, T_{1192}^{(I)}, T_{593}^{(I)}, T_{209}^{(I)}, T_{909}^{(I)}, T_{559}^{(I)}, T_{1342}^{(I)}, T_{349}^{(I)}, T_{726}^{(I)}, T^{(VII)}.$

88) $T_{88}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 4 \to 7 \to 11 \to 5 \to 12 \to 3 \to 10 \to 6 \to 8 \to 13 \to 1;$

$U_{88}^{(I)}: T_{1050}^{(I)}, T_{343}^{(I)}, T_{838}^{(I)}, T_{1346}^{(I)}, T_{562}^{(I)}, T_{1462}^{(I)}, T_{237}^{(I)}, T_{1193}^{(I)}, T_{658}^{(I)}, T_{997}^{(I)}, T_{1600}^{(I)}, T^{(VII)}.$

89) $T_{89}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 5 \to 4 \to 6 \to 10 \to 7 \to 12 \to 13 \to 3 \to 11 \to 8 \to 1;$

$U_{89}^{(I)}: T_{1064}^{(I)}, T_{467}^{(I)}, T_{324}^{(I)}, T_{693}^{(I)}, T_{1207}^{(I)}, T_{844}^{(I)}, T_{1575}^{(I)}, T_{1611}^{(I)}, T_{255}^{(I)}, T_{1390}^{(I)}, T_{878}^{(I)}, T^{(VII)}.$

90) $T_{90}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 5 \to 8 \to 13 \to 3 \to 11 \to 4 \to 7 \to 10 \to 6 \to 12 \to 1;$

$U_{90}^{(I)}: T_{1057}^{(I)}, T_{509}^{(I)}, T_{1007}^{(I)}, T_{1604}^{(I)}, T_{262}^{(I)}, T_{1331}^{(I)}, T_{338}^{(I)}, T_{817}^{(I)}, T_{1191}^{(I)}, T_{708}^{(I)}, T_{1456}^{(I)}, T^{(VII)}.$

91) $T_{91}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 3 \to 11 \to 4 \to 6 \to 13 \to 5 \to 8 \to 12 \to 10 \to 7 \to 1;$

$U_{91}^{(I)}: T_{1026}^{(I)}, T_{252}^{(I)}, T_{1344}^{(I)}, T_{325}^{(I)}, T_{718}^{(I)}, T_{1639}^{(I)}, T_{512}^{(I)}, T_{987}^{(I)}, T_{1537}^{(I)}, T_{1203}^{(I)}, T_{729}^{(I)}, T^{(VII)}.$

92) $T_{92}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 13 \to 8 \to 4 \to 7 \to 3 \to 12 \to 11 \to 5 \to 10 \to 6 \to 1;$

$U_{92}^{(I)}: T_{1149}^{(I)}, T_{1659}^{(I)}, T_{901}^{(I)}, T_{341}^{(I)}, T_{738}^{(I)}, T_{265}^{(I)}, T_{1562}^{(I)}, T_{1360}^{(I)}, T_{539}^{(I)}, T_{1188}^{(I)}, T_{582}^{(I)}, T^{(VII)}.$

93) $T_{93}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 8 \to 10 \to 6 \to 4 \to 7 \to 11 \to 3 \to 13 \to 12 \to 5 \to 1;$

$U_{93}^{(I)}: T_{1104}^{(I)}, T_{960}^{(I)}, T_{1185}^{(I)}, T_{604}^{(I)}, T_{347}^{(I)}, T_{828}^{(I)}, T_{1323}^{(I)}, T_{278}^{(I)}, T_{1714}^{(I)}, T_{1486}^{(I)}, T_{443}^{(I)}, T^{(VII)}.$

94) $T_{94}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 12 \to 4 \to 7 \to 10 \to 6 \to 5 \to 3 \to 13 \to 8 \to 11 \to 1;$

$U_{94}^{(I)}: T_{1134}^{(I)}, T_{1478}^{(I)}, T_{337}^{(I)}, T_{812}^{(I)}, T_{1196}^{(I)}, T_{627}^{(I)}, T_{451}^{(I)}, T_{279}^{(I)}, T_{1667}^{1)}, T_{972}^{(I)}, T_{1302}^{(I)}, T^{(VII)}.$

95) $T_{95}^{(I)} = 1 \to 2 \to 9 \to 12 \to 11 \to 3 \to 13 \to 8 \to 4 \to 6 \to 10 \to 7 \to 5 \to 1;$

$U_{95}^{(I)}: T_{1135}^{(I)}, T_{1554}^{(I)}, T_{1316}^{(I)}, T_{283}^{(I)}, T_{1664}^{(I)}, T_{894}^{(I)}, T_{321}^{(I)}, T_{683}^{(I)}, T_{1212}^{(I)}, T_{768}^{(I)}, T_{441}^{(I)}, T^{(VII)}.$

96) $T_{96}^{(I} = 1 \to 2 \to 9 \to 8 \to 5 \to 3 \to 13 \to 12 \to 10 \to 7 \to 4 \to 6 \to 11 \to 1;$

$U_{96}^{(I)}: T_{1103}^{(I)}, T_{912}^{(I)}, T_{455}^{(I)}, T_{275}^{(I)}, T_{1720}^{(I)}, T_{1548}^{(I)}, T_{1201}^{(I)}, T_{747}^{(I)}, T_{331}^{(I)}, T_{702}^{(I)}, T_{1300}^{(I)}, T^{(VII)}.$

97) $T_{97}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 7 \to 9 \to 4 \to 5 \to 12 \to 6 \to 8 \to 13 \to 10 \to 3 \to 1;$

$U_{97}^{(I)}: T_{1371}^{(I)}, T_{804}^{(I)}, T_{1051}^{(I)}, T_{313}^{1)}, T_{563}^{(I)}, T_{1491}^{(I)}, T_{659}^{(I)}, T_{1001}^{(I)}, T_{1701}^{(I)}, T_{1167}^{(I)}, T_{156}^{(I)}, T^{(VII)}.$

98) $T_{98}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 12 \to 13 \to 10 \to 5 \to 7 \to 8 \to 6 \to 9 \to 4 \to 3 \to 1;$

$U_{98}^{(I)}: T_{1417}^{(I)}, T_{1581}^{(I)}, T_{1704}^{(I)}, T_{1183}^{(I)}, T_{503}^{(I)}, T_{787}^{(I)}, T_{927}^{(I)}, T_{674}^{(I)}, T_{1048}^{(I)}, T_{297}^{(I)}, T_{146}^{(I)}, T^{(VII)}.$

99) $T_{99}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 8 \to 6 \to 7 \to 12 \to 13 \to 10 \to 3 \to 4 \to 5 \to 9 \to 1;$
$U_{99}^{(I)} : T_{1387}^{(I)}, T_{930}^{(I)}, T_{633}^{(I)}, T_{841}^{(I)}, T_{1582}^{(I)}, T_{1702}^{(I)}, T_{1160}^{(I)}, T_{166}^{(I)}, T_{319}^{(I)}, T_{528}^{(I)}, T_{1020}^{(I)}, T^{(VII)}.$

100) $T_{100}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 9 \to 10 \to 3 \to 4 \to 5 \to 8 \to 12 \to 7 \to 6 \to 13 \to 1;$
$U_{100}^{(I)} : T_{1395}^{(I)}, T_{1116}^{(I)}, T_{1165}^{(I)}, T_{167}^{(I)}, T_{310}^{(I)}, T_{517}^{(I)}, T_{977}^{(I)}, T_{1498}^{(I)}, T_{779}^{(I)}, T_{719}^{(I)}, T_{1595}^{(I)}, T^{(VII)}.$

101) $T_{101}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 13 \to 9 \to 7 \to 12 \to 8 \to 4 \to 5 \to 10 \to 3 \to 6 \to 1;$
$U_{101}^{(I)} : T_{1433}^{(I)}, T_{1676}^{(I)}, T_{1095}^{(I)}, T_{855}^{(I)}, T_{1524}^{(I)}, T_{899}^{(I)}, T_{320}^{(I)}, T_{538}^{(I)}, T_{1155}^{(I)}, T_{195}^{(I)}, T_{586}^{(I)}, T^{(VII)}.$

102) $T_{102}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 12 \to 8 \to 4 \to 3 \to 7 \to 13 \to 9 \to 6 \to 10 \to 5 \to 1;$
$U_{102}^{(I)} : T_{1431}^{(I)}, T_{1523}^{(I)}, T_{895}^{(I)}, T_{300}^{(I)}, T_{204}^{I)}, T_{857}^{(I)}, T_{1673}^{(I)}, T_{1075}^{(I)}, T_{696}^{(I)}, T_{1181}^{(I)}, T_{435}^{(I)}, T^{(VII)}.$

103) $T_{103}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 9 \to 13 \to 12 \to 7 \to 6 \to 10 \to 5 \to 4 \to 3 \to 8 \to 1;$
$U_{103}^{(I)} : T_{1393}^{(I)}, T_{1137}^{(I)}, T_{1725}^{(I)}, T_{1509}^{(I)}, T_{783}^{(I)}, T_{695}^{(I)}, T_{1177}^{(I)}, T_{471}^{(I)}, T_{301}^{(I)}, T_{212}^{(I)}, T_{867}^{(I)}, T^{(VII)}.$

104) $T_{104}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 8 \to 10 \to 5 \to 4 \to 3 \to 9 \to 7 \to 12 \to 13 \to 6 \to 1;$
$U_{104}^{(I)} : T_{1388}^{(I)}, T_{966}^{(I)}, T_{1184}^{(I)}, T_{472}^{(I)}, T_{289}^{(I)}, T_{217}^{(I)}, T_{1092}^{(I)}, T_{851}^{(I)}, T_{1580}^{(I)}, T_{1644}^{(I)}, T_{581}^{(I)}, T^{(VII)}.$

105) $T_{105}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 4 \to 5 \to 8 \to 13 \to 6 \to 12 \to 10 \to 3 \to 9 \to 7 \to 1;$
$U_{105}^{(I)} : T_{1337}^{(I)}, T_{305}^{(I)}, T_{507}^{(I)}, T_{1008}^{(I)}, T_{1643}^{(I)}, T_{707}^{(I)}, T_{1547}^{(I)}, T_{1166}^{(I)}, T_{222}^{(I)}, T_{1096}^{(I)}, T_{734}^{(I)}, T^{(VII)}.$

106) $T_{106}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 4 \to 3 \to 9 \to 6 \to 13 \to 7 \to 10 \to 5 \to 8 \to 12 \to 1;$
$U_{106}^{(I)} : T_{1336}^{(I)}, T_{304}^{(I)}, T_{226}^{(I)}, T_{1074}^{(I)}, T_{716}^{(I)}, T_{1653}^{(I)}, T_{822}^{(I)}, T_{1171}^{(I)}, T_{505}^{(I)}, T_{992}^{(I)}, T_{1445}^{(I)}, T^{(VII)}.$

107) $T_{107}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 13 \to 4 \to 3 \to 10 \to 5 \to 6 \to 7 \to 12 \to 8 \to 9 \to 1;$
$U_{107}^{(I)} : T_{1435}^{(I)}, T_{1621}^{(I)}, T_{292}^{(I)}, T_{247}^{(I)}, T_{1178}^{(I)}, T_{489}^{(I)}, T_{634}^{(I)}, T_{842}^{(I)}, T_{1526}^{(I)}, T_{952}^{(I)}, T_{1011}^{(I)}, T^{(VII)}.$

108) $T_{108}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 6 \to 8 \to 12 \to 7 \to 9 \to 4 \to 3 \to 10 \to 5 \to 13 \to 1;$
$U_{108}^{(I)} : T_{1364}^{(I)}, T_{663}^{(I)}, T_{978}^{(I)}, T_{1497}^{(I)}, T_{802}^{(I)}, T_{1049}^{(I)}, T_{294}^{(I)}, T_{248}^{(I)}, T_{1175}^{(I)}, T_{574}^{(I)}, T_{1588}^{(I)}, T^{(VII)}.$

109) $T_{109}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 7 \to 6 \to 10 \to 3 \to 12 \to 9 \to 13 \to 8 \to 4 \to 5 \to 1;$
$U_{109}^{(I)} : T_{1378}^{(I)}, T_{784}^{(I)}, T_{691}^{(I)}, T_{1158}^{(I)}, T_{267}^{(I)}, T_{1529}^{(I)}, T_{1138}^{(I)}, T_{1670}^{(I)}, T_{898}^{(I)}, T_{311}^{(I)}, T_{440}^{(I)}, T^{(VII)}.$

110) $T_{110}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 6 \to 4 \to 5 \to 10 \to 3 \to 13 \to 12 \to 7 \to 9 \to 8 \to 1;$
$U_{110}^{(I)} : T_{1368}^{(I)}, T_{609}^{(I)}, T_{315}^{(I)}, T_{540}^{(I)}, T_{1154}^{(I)}, T_{273}^{(I)}, T_{1728}^{(I)}, T_{1503}^{(I)}, T_{796}^{(I)}, T_{1099}^{(I)}, T_{872}^{(I)}, T^{(VII)}.$

111) $T_{111}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 10 \to 3 \to 13 \to 8 \to 9 \to 12 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 1;$
$U_{111}^{(I)} : T_{1413}^{(I)}, T_{1161}^{(I)}, T_{288}^{(I)}, T_{1657}^{(I)}, T_{947}^{(I)}, T_{1132}^{(I)}, T_{1470}^{(I)}, T_{306}^{(I)}, T_{483}^{(I)}, T_{644}^{(I)}, T_{732}^{(I)}, T^{(VII)}.$

112) $T_{112}^{(I)} = 1 \to 2 \to 11 \to 10 \to 5 \to 6 \to 9 \to 8 \to 7 \to 4 \to 3 \to 13 \to 12 \to 1;$
$U_{112}^{(I)} : T_{1416}^{(I)}, T_{1170}^{(I)}, T_{481}^{(I)}, T_{676}^{(I)}, T_{1102}^{(I)}, T_{939}^{(I)}, T_{748}^{(I)}, T_{295}^{(I)}, T_{282}^{(I)}, T_{1723}^{(I)}, T_{1443}^{(I)}, T^{(VII)}.$

113) $T_{113}^{(I)} = 1 \to 2 \to 12 \to 9 \to 4 \to 13 \to 10 \to 8 \to 5 \to 11 \to 7 \to 6 \to 3 \to 1;$
$U_{113}^{(I)} : T_{1530}^{(I)}, T_{1055}^{(I)}, T_{425}^{(I)}, T_{1693}^{(I)}, T_{1230}^{(I)}, T_{915}^{(I)}, T_{554}^{(I)}, T_{1373}^{(I)}, T_{778}^{(I)}, T_{595}^{(I)}, T_{149}^{(I)}, T^{(VII)}.$

114) $T_{114}^{(I)} = 1 \to 2 \to 12 \to 6 \to 5 \to 11 \to 7 \to 9 \to 10 \to 13 \to 4 \to 8 \to 3 \to 1;$
$U_{114}^{(I)} : T_{1490}^{(I)}, T_{628}^{(I)}, T_{551}^{(I)}, T_{1374}^{(I)}, T_{805}^{(I)}, T_{1112}^{(I)}, T_{1295}^{(I)}, T_{1624}^{(I)}, T_{366}^{(I)}, T_{883}^{(I)}, T_{154}^{(I)}, T^{(VII)}.$

115) $T_{115}^{(I)} = 1 \to 2 \to 12 \to 7 \to 9 \to 10 \to 8 \to 11 \to 6 \to 5 \to 3 \to 4 \to 13 \to 1;$
$U_{115}^{(I)} : T_{1512}^{(I)}, T_{793}^{(I)}, T_{1107}^{(I)}, T_{1228}^{(I)}, T_{973}^{(I)}, T_{1367}^{(I)}, T_{626}^{(I)}, T_{457}^{(I)}, T_{176}^{(I)}, T_{422}^{(I)}, T_{1590}^{(I)}, T^{(VII)}.$

116) $T_{116}^{(I)} = 1 \to 2 \to 12 \to 5 \to 6 \to 7 \to 11 \to 3 \to 4 \to 13 \to 10 \to 8 \to 9 \to 1;$
$U_{116}^{(I)} : T_{1488}^{(I)}, T_{491}^{(I)}, T_{640}^{(I)}, T_{833}^{(I)}, T_{1314}^{(I)}, T_{161}^{(I)}, T_{430}^{(I)}, T_{1694}^{(I)}, T_{1224}^{(I)}, T_{950}^{(I)}, T_{1022}^{(I)}, T^{(VII)}.$

117) $T_{117}^{(I)} = 1 \to 2 \to 12 \to 11 \to 3 \to 4 \to 8 \to 7 \to 5 \to 6 \to 9 \to 10 \to 13 \to 1;$
$U_{117}^{(I)} : T_{1560}^{(I)}, T_{1319}^{(I)}, T_{163}^{(I)}, T_{358}^{(I)}, T_{942}^{(I)}, T_{766}^{(I)}, T_{496}^{(I)}, T_{665}^{(I)}, T_{1106}^{(I)}, T_{1296}^{(I)}, T_{1598}^{(I)}, T^{(VII)}.$

118) $T_{118}^{(I)} = 1 \to 2 \to 12 \to 7 \to 6 \to 4 \to 13 \to 11 \to 9 \to 3 \to 5 \to 10 \to 8 \to 1;$
$U_{118}^{(I)} : T_{1511}^{(I)}, T_{773}^{(I)}, T_{602}^{(I)}, T_{419}^{(I)}, T_{1711}^{(I)}, T_{1398}^{(I)}, T_{1029}^{(I)}, T_{177}^{(I)}, T_{543}^{(I)}, T_{1227}^{(I)}, T_{871}^{(I)}, T^{(VII)}.$

119) $T_{119}^{(I)} = 1 \to 2 \to 12 \to 4 \to 13 \to 3 \to 5 \to 9 \to 11 \to 10 \to 8 \to 6 \to 7 \to 1;$
$U_{119}^{(I)} : T_{1472}^{(I)}, T_{427}^{(I)}, T_{1613}^{(I)}, T_{185}^{(I)}, T_{524}^{(I)}, T_{1123}^{(I)}, T_{1402}^{(I)}, T_{1219}^{(I)}, T_{935}^{(I)}, T_{635}^{(I)}, T_{736}^{(I)}, T^{(VII)}.$

120) $T^{(I)}_{120} = 1 \to 2 \to 12 \to 5 \to 4 \to 8 \to 10 \to 13 \to 9 \to 7 \to 11 \to 3 \to 6 \to 1;$
$U^{(I)}_{120} : T^{(I)}_{1481}, T^{(I)}_{469}, T^{(I)}_{364}, T^{(I)}_{959}, T^{(I)}_{1286}, T^{(I)}_{1684}, T^{(I)}_{1091}, T^{(I)}_{840}, T^{(I)}_{1321}, T^{(I)}_{197}, T^{(I)}_{587}, T^{(VII)}.$

121) $T^{(I}_{121} = 1 \to 2 \to 12 \to 10 \to 8 \to 5 \to 3 \to 6 \to 11 \to 4 \to 13 \to 9 \to 7 \to 1;$
$U^{(I)}_{121} : T^{(I)}_{1549}, T^{(I)}_{1221}, T^{(I)}_{918}, T^{(I)}_{460}, T^{(I)}_{196}, T^{(I)}_{697}, T^{(I)}_{1333}, T^{(I)}_{431}, T^{(I)}_{1685}, T^{(I)}_{1086}, T^{(I)}_{724}, T^{(VII)}.$

122) $T^{(I)}_{122} = 1 \to 2 \to 12 \to 10 \to 13 \to 9 \to 6 \to 3 \to 7 \to 4 \to 8 \to 5 \to 11 \to 1;$
$U^{(I)}_{122} : T^{(I)}_{1540}, T^{(I)}_{1291}, T^{(I)}_{1678}, T^{(I)}_{1076}, T^{(I)}_{594}, T^{(I)}_{201}, T^{(I)}_{758}, T^{(I)}_{361}, T^{(I)}_{919}, T^{(I)}_{556}, T^{(I)}_{1304}, T^{(VII)}.$

123) $T^{(I)}_{123} = 1 \to 2 \to 12 \to 3 \to 9 \to 7 \to 11 \to 5 \to 10 \to 8 \to 4 \to 13 \to 6 \to 1;$
$U^{(I)}_{123} : T^{(I)}_{1459}, T^{(I)}_{231}, T^{(I)}_{1033}, T^{(I)}_{837}, T^{(I)}_{1353}, T^{(I)}_{534}, T^{(I)}_{1231}, T^{(I)}_{897}, T^{(I)}_{417}, T^{(I)}_{1642}, T^{(I)}_{590}, T^{(VII)}.$

124) $T^{(I)}_{124} = 1 \to 2 \to 12 \to 11 \to 5 \to 10 \to 13 \to 7 \to 3 \to 9 \to 6 \to 4 \to 8 \to 1;$
$U^{(I)}_{124} : T^{(I)}_{1558}, T^{(I)}_{1349}, T^{(I)}_{537}, T^{(I)}_{1282}, T^{(I)}_{1650}, T^{(I)}_{742}, T^{(I)}_{230}, T^{(I)}_{1072}, T^{(I)}_{613}, T^{(I)}_{367}, T^{(I)}_{869}, T^{(VII)}.$

125) $T^{(I)}_{125} = 1 \to 2 \to 12 \to 3 \to 10 \to 13 \to 4 \to 8 \to 6 \to 7 \to 11 \to 5 \to 9 \to 1;$
$U^{(I)}_{125} : T^{(I)}_{1464}, T^{(I)}_{235}, T^{(I)}_{1293}, T^{(I)}_{1620}, T^{(I)}_{359}, T^{(I)}_{933}, T^{(I)}_{637}, T^{(I)}_{832}, T^{(I)}_{1348}, T^{(I)}_{522}, T^{(I)}_{1024}, T^{(VII)}.$

126) $T^{(I)}_{126} = 1 \to 2 \to 12 \to 9 \to 3 \to 11 \to 7 \to 6 \to 4 \to 8 \to 10 \to 13 \to 5 \to 1;$
$U^{(I)}_{126} : T^{(I)}_{1534}, T^{(I)}_{1030}, T^{(I)}_{251}, T^{(I)}_{1376}, T^{(I)}_{775}, T^{(I)}_{615}, T^{(I)}_{357}, T^{(I)}_{953}, T^{(I)}_{1283}, T^{(I)}_{1640}, T^{(I)}_{439}, T^{(VII)}.$

127) $T^{(I)}_{127} = 1 \to 2 \to 12 \to 4 \to 8 \to 6 \to 9 \to 5 \to 7 \to 10 \to 13 \to 3 \to 11 \to 1;$
$U^{(I)}_{127} : T^{(I)}_{1465}, T^{(I)}_{355}, T^{(I)}_{934}, T^{(I)}_{669}, T^{(I)}_{1063}, T^{(I)}_{500}, T^{(I)}_{816}, T^{(I)}_{1287}, T^{(I)}_{1607}, T^{(I)}_{260}, T^{(I)}_{1312}, T^{(VII)}.$

128) $T^{(I)}_{128} = 1 \to 2 \to 12 \to 6 \to 10 \to 8 \to 4 \to 13 \to 3 \to 11 \to 7 \to 9 \to 5 \to 1;$
$U^{(I)}_{128} : T^{(I)}_{1492}, T^{(I)}_{694}, T^{(I)}_{1223}, T^{(I)}_{889}, T^{(I)}_{421}, T^{(I)}_{1615}, T^{(I)}_{253}, T^{(I)}_{1383}, T^{(I)}_{798}, T^{(I)}_{1058}, T^{(I)}_{448}, T^{(VII)}.$

129) $T^{(I)}_{129} = 1 \to 2 \to 13 \to 10 \to 8 \to 6 \to 7 \to 5 \to 9 \to 4 \to 12 \to 11 \to 3 \to 1;$
$U^{(I)}_{129} : T^{(I)}_{1689}, T^{(I)}_{1232}, T^{(I)}_{931}, T^{(I)}_{642}, T^{(I)}_{763}, T^{(I)}_{525}, T^{(I)}_{1044}, T^{(I)}_{409}, T^{(I)}_{1556}, T^{(I)}_{1325}, T^{(I)}_{158}, T^{(VII)}.$

130) $T^{(I)}_{130} = 1 \to 2 \to 13 \to 4 \to 12 \to 7 \to 6 \to 11 \to 9 \to 10 \to 8 \to 5 \to 3 \to 1;$
$U^{(I)}_{130} : T^{(I)}_{1618}, T^{(I)}_{415}, T^{(I)}_{1499}, T^{(I)}_{780}, T^{(I)}_{700}, T^{(I)}_{1396}, T^{(I)}_{1119}, T^{(I)}_{1225}, T^{(I)}_{913}, T^{(I)}_{458}, T^{(I)}_{148}, T^{(VII)}.$

131) $T^{(I)}_{131} = 1 \to 2 \to 13 \to 10 \to 12 \to 11 \to 5 \to 7 \to 3 \to 4 \to 8 \to 6 \to 9 \to 1;$
$U^{(I)}_{131} : T^{(I)}_{1700}, T^{(I)}_{1270}, T^{(I)}_{1563}, T^{(I)}_{1347}, T^{(I)}_{498}, T^{(I)}_{744}, T^{(I)}_{170}, T^{(I)}_{365}, T^{(I)}_{932}, T^{(I)}_{671}, T^{(I)}_{1017}, T^{(VII)}.$

132) $T^{(I)}_{132} = 1 \to 2 \to 13 \to 11 \to 7 \to 9 \to 3 \to 5 \to 4 \to 8 \to 10 \to 12 \to 6 \to 1;$
$U^{(I)}_{132} : T^{(I)}_{1706}, T^{(I)}_{1377}, T^{(I)}_{801}, T^{(I)}_{1040}, T^{(I)}_{181}, T^{(I)}_{465}, T^{(I)}_{354}, T^{(I)}_{967}, T^{(I)}_{1277}, T^{(I)}_{1493}, T^{(I)}_{585}, T^{(VII)}.$

133) $T^{(I)}_{133} = 1 \to 2 \to 13 \to 11 \to 4 \to 12 \to 10 \to 8 \to 6 \to 9 \to 3 \to 5 \to 7 \to 1;$
$U^{(I)}_{133} : T^{(I)}_{1707}, T^{(I)}_{1330}, T^{(I)}_{403}, T^{(I)}_{1551}, T^{(I)}_{1226}, T^{(I)}_{924}, T^{(I)}_{677}, T^{(I)}_{1037}, T^{(I)}_{187}, T^{(I)}_{499}, T^{(I)}_{731}, T^{(VII)}.$

134) $T^{(I)}_{134} = 1 \to 2 \to 13 \to 3 \to 5 \to 4 \to 12 \to 9 \to 11 \to 7 \to 6 \to 10 \to 8 \to 1;$
$U^{(I)}_{134} : T^{(I)}_{1601}, T^{(I)}_{191}, T^{(I)}_{475}, T^{(I)}_{412}, T^{(I)}_{1533}, T^{(I)}_{1122}, T^{(I)}_{1382}, T^{(I)}_{774}, T^{(I)}_{681}, T^{(I)}_{1220}, T^{(I)}_{879}, T^{(VII)}.$

135) $T^{(I)}_{135} = 1 \to 2 \to 13 \to 9 \to 7 \to 4 \to 8 \to 3 \to 6 \to 5 \to 11 \to 10 \to 12 \to 1;$
$U^{(I)}_{135} : T^{(I}_{1679}, T^{(I)}_{1094}, T^{(I)}_{754}, T^{I)}_{363}, T^{(I)}_{881}, T^{(I)}_{194}, T^{(I)}_{631}, T^{(I)}_{555}, T^{(I)}_{1410}, T^{(I)}_{1268}, T^{(I)}_{1450}, T^{(VII)}.$

136) $T^{(I)}_{136} = 1 \to 2 \to 13 \to 9 \to 6 \to 10 \to 12 \to 3 \to 7 \to 11 \to 5 \to 4 \to 8 \to 1;$
$U^{(I)}_{136} : T^{(I)}_{1687}, T^{(I)}_{1069}, T^{(I)}_{684}, T^{(I)}_{1275}, T^{(I)}_{1457}, T^{(I)}_{202}, T^{(I)}_{839}, T^{(I)}_{1354}, T^{(I)}_{470}, T^{(I)}_{362}, T^{(I)}_{877}, T^{(VII)}.$

137) $T^{(I)}_{137} = 1 \to 2 \to 13 \to 6 \to 4 \to 8 \to 10 \to 12 \to 11 \to 3 \to 9 \to 7 \to 5 \to 1;$
$U^{(I)}_{137} : T^{(I)}_{1646}, T^{(I)}_{607}, T^{(I)}_{353}, T^{(I)}_{956}, T^{(I)}_{1278}, T^{(I)}_{1559}, T^{(I)}_{1315}, T^{(I)}_{228}, T^{(I)}_{1088}, T^{(I)}_{767}, T^{(I)}_{444}, T^{(VII)}.$

138) $T^{(I)}_{138} = 1 \to 2 \to 13 \to 6 \to 5 \to 3 \to 9 \to 7 \to 4 \to 12 \to 10 \to 8 \to 11 \to 1;$
$U^{(I)}_{138} : T^{(I)}_{1645}, T^{(I)}_{618}, T^{(I)}_{462}, T^{(I)}_{229}, T^{(I)}_{1087}, T^{(I)}_{757}, T^{(I)}_{401}, T^{(I)}_{1539}, T^{(I)}_{1229}, T^{(I)}_{971}, T^{(I)}_{1303}, T^{(VII)}.$

139) $T^{(I)}_{139} = 1 \to 2 \to 13 \to 7 \to 11 \to 3 \to 9 \to 6 \to 10 \to 8 \to 4 \to 12 \to 5 \to 1;$
$U^{(I)}_{139} : T^{(I)}_{1652}, T^{(I)}_{835}, T^{(I)}_{1320}, T^{(I)}_{219}, T^{(I)}_{1078}, T^{(I)}_{686}, T^{(I)}_{1217}, T^{(I)}_{891}, T^{(I)}_{416}, T^{I)}_{1485}, T^{(I)}_{442}, T^{(VII)}.$

140) $T_{140}^{(I)} = 1 \to 2 \to 13 \to 7 \to 10 \to 12 \to 4 \to 8 \to 5 \to 3 \to 9 \to 6 \to 11 \to 1;$
$U_{140}^{(I)} : T_{1651}^{(I)}, T_{818}^{(I)}, T_{1265}^{(I)}, T_{1468}^{(I)}, T_{368}^{(I)}, T_{903}^{(I)}, T_{461}^{(I)}, T_{232}^{(I)}, T_{1066}^{(I)}, T_{701}^{(I)}, T_{1301}^{(I)}, T^{(VII)}.$

141) $T_{141}^{(I)} = 1 \to 2 \to 13 \to 4 \to 8 \to 5 \to 11 \to 6 \to 3 \to 10 \to 12 \to 7 \to 9 \to 1;$
$U_{141}^{(I)} : T_{1631}^{(I)}, T_{360}^{(I)}, T_{911}^{(I)}, T_{546}^{(I)}, T_{1362}^{(I)}, T_{600}^{(I)}, T_{238}^{(I)}, T_{1274}^{(I)}, T_{1501}^{(I)}, T_{803}^{(I)}, T_{1016}^{(I)}, T^{(VII)}.$

142) $T_{142}^{(I)} = 1 \to 2 \to 13 \to 5 \to 10 \to 8 \to 4 \to 12 \to 7 \to 9 \to 3 \to 11 \to 6 \to 1;$
$U_{142}^{(I)} : T_{1633}^{(I)}, T_{531}^{(I)}, T_{1218}^{(I)}, T_{904}^{(I)}, T_{406}^{(I)}, T_{1510}^{(I)}, T_{799}^{(I)}, T_{1027}^{(I)}, T_{263}^{(I)}, T_{1365}^{(I)}, T_{584}^{(I)}, T^{(VII)}.$

143) $T_{143}^{(I)} = 1 \to 2 \to 13 \to 3 \to 11 \to 10 \to 8 \to 9 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4 \to 12 \to 1;$
$U_{143}^{(I)} : T_{1612}^{(I)}, T_{258}^{(I)}, T_{1414}^{(I)}, T_{1222}^{(I)}, T_{949}^{(I)}, T_{1061}^{(I)}, T_{485}^{(I)}, T_{645}^{(I)}, T_{745}^{(I)}, T_{404}^{(I)}, T_{1455}^{(I)}, T^{(VII)}.$

144) $T_{144}^{(I)} = 1 \to 2 \to 13 \to 5 \to 6 \to 9 \to 3 \to 11 \to 10 \to 12 \to 4 \to 8 \to 7 \to 1;$
$U_{144}^{(I)} : T_{1637}^{(I)}, T_{494}^{(I)}, T_{668}^{(I)}, T_{1035}^{(I)}, T_{254}^{(I)}, T_{1403}^{(I)}, T_{1267}^{(I)}, T_{1479}^{(I)}, T_{356}^{(I)}, T_{941}^{(I)}, T_{720}^{(I)}, T^{(VII)}.$

41. Im Anschluß hieran beweisen wir jetzt den folgenden

Satz 24. *Jede fixpunktfreie Inzidenzabbildung* $T_{\nu}^{(I)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 1728)$ *von* $S(13/2/4)$ *ist auch fixgeradenfrei.*

Beweis. Da sich die Elemente einer jeden der zyklischen Gruppen $U_{\lambda}^{(I)}$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, 144)$ gleichberechtigt verhalten, so genügt es, den behaupteten Satz für die Elemente irgendeiner der $U_{\lambda}^{(I)}$ zu beweisen. Wir wählen dazu etwa die $U_{9}^{(I)}$, die als Elemente (von der Identität $T^{(VII)}$ abgesehen) die $T_{\varrho}^{(I)}$ $(\varrho = 9, 224, 1068, 614, 400, 1436, 1656, 850, 1525, 958, 1169, 434)$ besitzt (s. Nr. **40** unter 9). Dann würde der Nachweis in 12 analogen Schritten verlaufen; wir führen explizit nur einen einzigen aus und überlassen die übrigen dem Leser, wobei wir überdies auf Nr. **18** zurückverweisen können, da die dort explizit durchgeführten Beweisschritte den hier auszuführenden vollständig analog sind.

Aus $T_{\varrho}^{(I)}$ wählen wir die Inzidenzabbildung $T_{400}^{(I)}$, die folgendermaßen definiert war (s. Nr. **40**):

$$T_{400}^{(I)} = 1 \to 4 \to 8 \to 3 \to 13 \to 5 \to 6 \to 12 \to 2 \to 11 \to 10 \to 9 \to 7 \to 1.$$

Dann werden vermöge $T_{400}^{(I)}$ die Geraden von $S(13/2/4)$ folgendermaßen abgebildet (s. Tafel, Abb. 1):

$$\begin{aligned}
(1) &= (1, 2, 4, 10) &&\to (4, 11, 8, 9) &&= (8)\\
(2) &= (2, 3, 5, 11) &&\to (11, 13, 6, 10) &&= (10)\\
(3) &= (3, 4, 6, 12) &&\to (13, 8, 12, 2) &&= (12)\\
(4) &= (4, 5, 7, 13) &&\to (8, 6, 1, 5) &&= (5)\\
(5) &= (1, 5, 6, 8) &&\to (4, 6, 12, 3) &&= (3)\\
(6) &= (2, 6, 7, 9) &&\to (11, 12, 1, 7) &&= (11)\\
(7) &= (3, 7, 8, 10) &&\to (13, 1, 3, 9) &&= (13)\\
(8) &= (4, 8, 9, 11) &&\to (8, 3, 7, 10) &&= (7)\\
(9) &= (5, 9, 10, 12) &&\to (6, 7, 9, 2) &&= (6)\\
(10) &= (6, 10, 11, 13) &&\to (12, 9, 10, 5) &&= (9)\\
(11) &= (1, 7, 11, 12) &&\to (4, 1, 10, 2) &&= (1)\\
(12) &= (2, 8, 12, 13) &&\to (11, 3, 2, 5) &&= (2)\\
(13) &= (1, 3, 9, 13) &&\to (4, 13, 7, 5) &&= (4),
\end{aligned}$$

also:

$$(1) \to (8) \to (7) \to (13) \to (4) \to (5) \to (3) \to (12) \to (2) \to (10) \to (9) \to (6) \to (11) \to (1).$$

§ 7. *Der einfixpunktige Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{II})}$ *in* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$.

42. Als einziger Fixpunkt werde etwa der Punkt 1 von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ vorgeschrieben. Dann wird die einfixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ auf sich mit Hilfe eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, j', k', l'\}$ vorgenommen, in dem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangsnetzes der Reihe nach die Punkte $1, j', k', l'$ als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ zugewiesen werden. Dabei sind überdies noch folgende Forderungen zu erfüllen:

1) $j' \neq 2,\ k' \neq 3,\ l' \neq 6$;

2) $\{1, j', k'\}$, $\{j', k', l'\}$, $\{k', l', 1\}$, $\{l', 1, j'\}$ sämtlich nicht kollinear;

3) $m_1' \neq 4,\ m_2' \neq 5,\ m_3' \neq 9$;

4) $m_4' \neq 8,\ m_5' \neq 11$; 5) $m_6' \neq 10,\ m_7' \neq 12$; 6) $m_8' \neq 7,\ m_9' \neq 13$.

Dann behaupten wir den folgenden allgemeinen Existenzsatz:

Satz 25. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *gibt es bei vorgeschriebenem Fixpunkt genau* 210 *untereinander und von der Identität verschiedene einfixpunktige Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{II})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 210)$, *die explizit angebbar sind.*

Beweis. Aus den obigen Forderungen 1)—6) folgert man wieder, durch systematisches Erfüllen derselben, leicht, daß als Bildvierecke $\{1, j', k', l'\}$ zu $\{1, 2, 3, 6\}$ *genau* die folgenden 210 Vierecke in $\boldsymbol{S}(13/24)$ eintreten können:

1. {1, 3, 2, 7}	25. {1, 4, 7, 3}	49. {1, 5, 12, 13}
2. {1, 3, 2, 12}	26. {1, 4, 8, 7}	50. {1, 5, 13, 11}
3. {1, 3, 4, 7}	27. {1, 4, 11, 13}	51. {1, 6, 2, 3}
4. {1, 3, 4, 11}	28. {1, 4, 12, 9}	52. {1, 6, 2, 11}
5. {1, 3, 5, 7}	29. {1, 5, 2, 7}	53. {1, 6, 2, 12}
6. {1, 3, 5, 12}	30. {1, 5, 2, 12}	54. {1, 6, 4, 7}
7. {1, 3, 6, 2}	31. {1, 5, 4, 9}	55. {1, 6, 4, 11}
8. {1, 3, 6, 7}	32. {1, 5, 4, 11}	56. {1, 6, 4, 13}
9. {1, 3, 6, 11}	33. {1, 5, 4, 12}	57. {1, 6, 7, 3}
10. {1, 3, 7, 2}	34. {1, 5, 7, 2}	58. {1, 6, 7, 4}
11. {1, 3, 7, 4}	35. {1, 5, 7, 3}	59. {1, 6, 7, 10}
12. {1, 3, 7, 5}	36. {1, 5, 7, 9}	60. {1, 6, 7, 13}
13. {1, 3, 8, 4}	37. {1, 5, 7, 10}	61. {1, 6, 9, 11}
14. {1, 3, 8, 11}	38. {1, 5, 9, 7}	62. {1, 6, 10, 7}
15. {1, 3, 8, 12}	39. {1, 5, 10, 3}	63. {1, 6, 10, 12}
16. {1, 3, 10, 11}	40. {1, 5, 10, 7}	64. {1, 6, 11, 2}
17. {1, 3, 10, 12}	41. {1, 5, 10, 11}	65. {1, 6, 11, 3}
18. {1, 3, 11, 4}	42. {1, 5, 11, 4}	66. {1, 6, 11, 4}
19. {1, 3, 11, 10}	43. {1, 5, 11, 9}	67. {1, 6, 11, 9}
20. {1, 3, 12, 2}	44. {1, 5, 11, 10}	68. {1, 6, 12, 2}
21. {1, 3, 12, 8}	45. {1, 5, 11, 13}	69. {1, 6, 12, 9}
22. {1, 3, 12, 10}	46. {1, 5, 12, 2}	70. {1, 6, 12, 10}
23. {1, 4, 5, 12}	47. {1, 5, 12, 3}	71. {1, 6, 12, 13}
24. {1, 4, 6, 11}	48. {1, 5, 12, 4}	72. {1, 6, 13, 12}

73. {1, 7, 2, 3}
74. {1, 7, 2, 8}
75. {1, 7, 2, 13}
76. {1, 7, 4, 3}
77. {1, 7, 4, 9}
78. {1, 7, 5, 2}
79. {1, 7, 5, 3}
80. {1, 7, 5, 9}
81. {1, 7, 5, 10}
82. {1, 7, 6, 3}
83. {1, 7, 6, 4}
84. (1, 7, 6, 10}
85. {1, 7, 6, 13}
86. {1, 7, 8, 2}
87. {1, 7, 8, 4}
88. {1, 7, 8, 9}
89. {1, 7, 8, 13}
90. {1, 7, 9, 4}
91. {1, 7, 10, 5}
92. {1, 7, 10, 9}
93. {1, 7, 10, 13}
94. {1, 7, 13, 10}
95. {1, 8, 2, 7}
96. {1, 8, 2, 9}
97. {1, 8, 2, 11}
98. {1, 8, 4, 7}
99. {1, 8, 4, 12}
100. {1, 8, 7, 2}
101. {1, 8, 7, 4)
102. {1, 8, 7, 9}
103. {1, 8, 7, 13}
104. {1, 8, 9, 12}
105. {1, 8, 10, 11}
106. {1, 8, 10, 12}
107. {1, 8, 10, 13}
108. {1, 8, 11, 2}
109. {1, 8, 11, 3}
110. {1, 8, 11, 10}
111. {1, 8, 11, 13}
112. {1, 8, 12, 3}
113. {1, 8, 12, 4}
114. {1, 8, 12, 9}
115. {1, 8, 12, 10}
116. {1, 8, 13, 7}
117. {1, 9, 2, 11}
118. {1, 9, 2, 12}
119. {1, 9, 4, 7}
120. {1, 9, 4, 12}
121. {1, 9, 5, 4}
122. {1, 9, 5, 7}
123. {1, 9, 5, 11}
124. {1, 9, 6, 10}
125. {1, 9, 6, 11}
126. {1, 9, 6, 12}
127. {1, 9, 7, 4}
128. {1, 9, 7, 8}
129. {1, 9, 7, 10}
130. {1, 9, 8, 7}
131. {1, 9, 8, 12}
132. {1, 9, 10, 7}
133. {1, 9, 10, 11}
134. {1, 9, 11, 2}
135. {1, 9, 11, 5}
136. {1, 9, 11, 10}
137. {1, 9, 12, 2}
138. {1, 9, 12, 4}
139. {1, 10, 5, 11}
140. {1, 10, 6, 7}
141. {1, 10, 7, 9}
142. {1, 10, 8, 12}
143. {1, 10, 11, 3}
144. {1, 10, 12, 13}
145. {1, 11, 2, 9}
146. {1, 11, 2, 13}
147. {1, 11, 4, 3}
148. {1, 11, 4, 5}
149. {1, 11, 4, 13}
150. {1, 11, 5, 4}
151. {1, 11, 5, 9}
152. {1, 11, 5, 10}
153. {1, 11, 5, 13}
154. {1, 11, 6, 2}
155. {1, 11, 6, 3}
156. {1, 11, 6, 4}
157. {1, 11, 6, 9}
158. {1, 11, 8, 2}
159. {1, 11, 8, 3}
160. {1, 11, 8, 10}
161. {1, 11, 8, 13}
162. {1, 11, 9, 10}
163. {1, 11, 10, 3}
164. {1, 11, 10, 8}
165. {1, 11, 10, 9}
166. {1, 11, 13, 2}
167. {1, 12, 2, 3}
168. {1, 12, 2, 5}
169. {1, 12, 2, 9}
170. {1, 12, 4, 8}
171. {1, 12, 4, 9}
172. {1, 12, 4, 13}
173. {1, 12, 5, 2}
174. {1, 12, 5, 3}
175. {1, 12, 5, 4}
176. {1, 12, 5, 13}
177. {1, 12, 6, 2}
178. {1, 12, 6, 9}
179. {1, 12, 6, 10}
180. {1, 12, 6, 13}
181. {1, 12, 8, 3}
182. {1, 12, 8, 4}
183. {1, 12, 8, 9}
184. {1, 12, 8, 10}
185. {1, 12, 9, 2}
186. {1, 12, 10, 3}
187. {1, 12, 10, 13}
188. {1, 12, 13, 4}
189. {1, 13, 2, 7}
190. {1, 13, 2, 11}
191. {1, 13, 4, 11}
192. {1, 13, 4, 12}
193. {1, 13, 5, 2}
194. {1, 13, 5, 11}
195. {1, 13, 5, 12}
196. {1, 13, 6, 7}
197. {1, 13, 6, 12}
198. {1, 13, 7, 2}
199. {1, 13, 7, 10}
200. {1, 13, 8, 7}
201. {1, 13, 8, 10}
202. {1, 13, 8, 11}
203. {1, 13, 10, 7}
204. {1, 13, 10, 12}
205. {1, 13, 11, 2}
206. {1, 13, 11, 4}
207. {1, 13, 11, 8}
208. {1, 13, 12, 4}
209. {1, 13, 12, 5}
210. {1, 13, 12, 10}

Die entsprechenden (mit gleichem Index wie diese Nummern versehenen), hierdurch erzeugten einfixpunktigen Inzidenzabbildungen $T_\nu^{(II)}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, 210$) lassen sich dann, wie sich zeigen wird, gruppentheoretisch nach den *Ordnungen* 8, 4, 3 *ihrer zyklischen Gruppen* ordnen. Durch Betrachtung dieser zyklischen Gruppen, insbesondere derjenigen der Ordnungen 8 und 3, kann man wieder die Gesamtheit der $T^{(II)}$ aus einigen wenigen ihrer Einzelvertreter systematisch gewinnen. Dies werde jetzt, wegen seiner Wichtigkeit für geometrisch-axiomatische Untersuchungen, explizit und im einzelnen gezeigt.

A) *Die zyklischen Gruppen der Ordnung* 8.

1) $T_5^{(II)}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe $U_5^{(II)}$:

$$T_5^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 13 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 4,$$

$$(T_5^{(II)})^2 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4, 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7 = T_{44}^{(II)},$$

$$(T_5^{(II)})^3 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 10 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4 = T_{145}^{(II)},$$

$$(T_5^{(II)})^4 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longleftrightarrow 2, 3 \longleftrightarrow 3, 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4, 5 \longleftrightarrow 5, 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 6, 7 \longrightarrow 12 \longrightarrow 7, 9 \longrightarrow 13 \longrightarrow 9, 11 \longleftrightarrow 11,$$

$$(T_5^{(II)})^5 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 = T_6^{(II)},$$

$$(T_5^{(II)})^6 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4, 7 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 9 \longrightarrow 7 = T_{42}^{(II)},$$

$$(T_5^{(II)})^7 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 13 \longrightarrow 4 = T_{146}^{(II)},$$

$$(T_5^{(II)})^8 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longleftrightarrow 2, 3 \longleftrightarrow 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, 13 \longleftrightarrow 13 = T^{(VII)}.$$

2) $T_8^{(II)}$ erzeugt $U_8^{(II)}$:

$$T_8^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 5 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 4,$$

$$(T_8^{(II)})^2 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4, 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 9 = T_{59}^{(II)},$$

$$(T_8^{(II)})^3 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 10 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 11 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4 = T_{93}^{(II)},$$

$$(T_8^{(II)})^4 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 10 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 13 \longrightarrow 3, 4 \longleftrightarrow 4, 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5, 7 \longrightarrow 12 \longrightarrow 7, 8 \longleftrightarrow 8, 9 \longleftrightarrow 9, 11 \longleftrightarrow 11,$$

$$(T_8^{(II)})^5 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 13 \longrightarrow 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 10 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 4 = T_{195}^{(II)},$$

$$(T_8^{(II)})^6 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 4, 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 9 = T_{46}^{(II)},$$

$$(T_8^{(II)})^7 = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 12 \longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 10 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 11 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4 = T_{167}^{(II)},$$

$$(T_8^{(II)})^8 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\

6) $T_{14}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2, 6 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 6;$
$U_{14}^{(II)} : T_{115}^{(II)}, T_{172}^{(II)}, T_{123}^{(II)}, T_{37}^{(II)}, T_{75}^{(II)}.$

7) $T_{15}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9 \longrightarrow 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 13 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4;$
$U_{15}^{(II)} : T_{103}^{(II)}, T_{163}^{(II)}, T_{125}^{(II)}, T_{70}^{(II)}, T_{169}^{(II)}.$

8) $T_{18}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4;$
$U_{18}^{(II)} : T_{151}^{(II)}, T_{30}^{(II)}, T_{19}^{(II)}, T_{153}^{(II)}, T_{29}^{(II)}.$

9) $T_{20}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4;$
$U_{20}^{(II)} : T_{181}^{(II)}, T_{106}^{(II)}, T_{136}^{(II)}, T_{157}^{(II)}, T_{52}^{(II)}.$

10) $T_{22}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 12 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 2, 6 \longrightarrow 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 11 \longrightarrow 6;$
$U_{22}^{(II)} : T_{176}^{(II)}, T_{32}^{(II)}, T_{129}^{(II)}, T_{89}^{(II)}, T_{97}^{(II)}.$

11) $T_{33}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 3;$
$U_{33}^{(II)} : T_{82}^{(II)}, T_{138}^{(II)}, T_{99}^{(II)}, T_{155}^{(II)}, T_{208}^{(II)}.$

12) $T_{35}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 4;$
$U_{35}^{(II)} : T_{189}^{(II)}, T_{173}^{(II)}, T_{71}^{(II)}, T_{17}^{(II)}, T_{84}^{(II)}.$

13) $T_{36}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 11 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3;$
$U_{36}^{(II)} : T_{201}^{(II)}, T_{158}^{(II)}, T_{60}^{(II)}, T_{133}^{(II)}, T_{182}^{(II)}.$

14) $T_{41}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 11 \longrightarrow 9 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3;$
$U_{41}^{(II)} : T_{183}^{(II)}, T_{198}^{(II)}, T_{63}^{(II)}, T_{161}^{(II)}, T_{127}^{(II)}.$

15) $T_{43}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 4;$
$U_{43}^{(II)} : T_{2}^{(II)}, T_{150}^{(II)}, T_{45}^{(II)}, T_{1}^{(II)}, T_{152}^{(II)}.$

16) $T_{47}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 12 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3;$
$U_{47}^{(II)} : T_{120}^{(II)}, T_{156}^{(II)}, T_{112}^{(II)}, T_{192}^{(II)}, T_{83}^{(II)}.$

17) $T_{49}^{(II)} = 1 \longrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2, 6 \longrightarrow 13 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6;$
$U_{49}^{(II)} : T_{117}^{(II)}, T_{81}^{(II)}, T_{103}^{(II)}, T_{4}^{(II)}, T_{184}^{(II)}.$

18) $T_{54}^{(II)} = 1 \longrightarrow 1, 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3;$
$U_{54}^{(II)} : T_{80}^{(II)}, T_{137}^{(II)}, T_{62}^{(II)}, T_{88}^{(II)}, T_{134}^{(II)}.$

19) $T_{57}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 11 \longrightarrow 2, 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5;$
$U_{57}^{(II)} : T_{3}^{(II)}, T_{87}^{(II)}, T_{111}^{(II)}, T_{190}^{(II)}, T_{154}^{(II)}.$

20) $T_{65}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2, 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4;$
$U_{65}^{(II)} : T_{16}^{(II)}, T_{160}^{(II)}, T_{114}^{(II)}, T_{118}^{(II)}, T_{177}^{(II)}.$

21) $T_{67}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3;$
$U_{67}^{(II)} : T_{132}^{(II)}, T_{78}^{(II)}, T_{69}^{(II)}, T_{119}^{(II)}, T_{86}^{(II)}.$

22) $T_{76}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3;$
$U_{76}^{(II)} : T_{113}^{(II)}, T_{126}^{(II)}, T_{147}^{(II)}, T_{48}^{(II)}, T_{197}^{(II)}.$

23) $T_{77}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 10 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3;$
$U_{77}^{(II)} : T_{64}^{(II)}, T_{122}^{(II)}, T_{92}^{(II)}, T_{68}^{(II)}, T_{130}^{(II)}.$

24) $T_{98}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3;$
$U_{98}^{(II)} : T_{174}^{(II)}, T_{206}^{(II)}, T_{105}^{(II)}, T_{178}^{(II)}, T_{199}^{(II)}.$

25) $T_{102}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3;$
$U_{102}^{(II)} : T_{191}^{(II)}, T_{179}^{(II)}, T_{109}^{(II)}, T_{203}^{(II)}, T_{175}^{(II)}.$

26) $\boldsymbol{T}_{131}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 9 \longrightarrow 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 4 \longrightarrow 13 \longrightarrow 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7 \longrightarrow 10 \longrightarrow 3;$
$\boldsymbol{U}_{131}^{(II)} : \boldsymbol{T}_{34}^{(II)},\ \boldsymbol{T}_{165}^{(II)},\ \boldsymbol{T}_{202}^{(II)},\ \boldsymbol{T}_{58}^{(II)},\ \boldsymbol{T}_{187}^{(II)}.$

27) $\boldsymbol{T}_{171}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 11 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3;$
$\boldsymbol{U}_{171}^{(II)} : \boldsymbol{T}_{110}^{(II)},\ \boldsymbol{T}_{196}^{(II)},\ \boldsymbol{T}_{186}^{(II)},\ \boldsymbol{T}_{101}^{(II)},\ \boldsymbol{T}_{194}^{(II)}.$

B) *Die zyklischen Gruppen der Ordnung* 4.

Man erkennt unmittelbar, *daß die zyklischen Gruppen* $\boldsymbol{V}^{(II)}$ *der Ordnung* 4 *Untergruppen der Gruppen* $\boldsymbol{U}^{(II)}$ *unter* A) *sind.*

1) $\boldsymbol{T}_1^{(II)}$ erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{V}_1^{(II)}$:

$$\boldsymbol{T}_1^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5,\ 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6,$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(II)})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 3,\ 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4,\ 5 \longleftrightarrow 5,\ 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 6,\ 7 \longrightarrow 12 \longrightarrow 7,\ 9 \longrightarrow 13 \longrightarrow 9,\ 11 \longleftrightarrow 11,$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(II)})^3 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 13 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5,\ 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 = \boldsymbol{T}_2^{(II)},$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(II)})^4 = \ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.$$

Mithin ist $\boldsymbol{V}_1^{(II)}$ eine Untergruppe von $\boldsymbol{U}_{43}^{(II)}$.

2) $\boldsymbol{T}_3^{(II)}$ erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{V}_3^{(II)}$:

$$\boldsymbol{T}_3^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2,\ 5 \longrightarrow 12 \longrightarrow 5,\ 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 6,\ 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9,$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(II)})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(II)})^3 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 13 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,\ 5 \longrightarrow 12 \longrightarrow 5,\ 6 \longrightarrow 11 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6,\ 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9 = \boldsymbol{T}_{190}^{(II)}$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(II)})^4 = \ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.$$

Mithin ist $\boldsymbol{V}_3^{(II)}$ eine Untergruppe von $\boldsymbol{U}_{57}^{(II)}$. Usw.

Man gewinnt daher auf diese Weise die noch fehlenden einfixpunktigen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}^{(II)}$ nicht, so daß wir jetzt, ohne uns um diese Gruppen der Ordnung 4 weiter zu kümmern, zur Auffindung der noch fehlenden $\boldsymbol{T}^{(II)}$ schreiten. Die hier obwaltenden gruppentheoretischen Zusammenhänge tragen wir in einer folgenden Arbeit nach.

C) *Die zyklischen Gruppen der Ordnung* 3.

1) $\boldsymbol{T}_7^{(II)}$ erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_7^{(II)}$:

$$\boldsymbol{T}_7^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4,\ 7 \longrightarrow 11 \longrightarrow 12 \longrightarrow 7,\ 8 \longrightarrow 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 8,$$
$$(\boldsymbol{T}_7^{(II)})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4,\ 7 \longrightarrow 12 \longrightarrow 11 \longrightarrow 7,\ 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8 = \boldsymbol{T}_{51}^{(II)},$$
$$(\boldsymbol{T}_7^{(II)})^3 = \ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.$$

2) $\boldsymbol{T}_{12}^{(II)}$ erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_{12}^{(II)}$:

$$\boldsymbol{T}_{12}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5,\ 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9,$$
$$(\boldsymbol{T}_{12}^{(II)})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5,\ 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11 \longrightarrow 9 = \boldsymbol{T}_{74}^{(II)},$$
$$(\boldsymbol{T}_{12}^{(II)})^3 = \ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.$$

3) $\boldsymbol{T}_{13}^{(II)}$ erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_{13}^{(II)}$:

$$\boldsymbol{T}_{13}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 8 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 5,\ 7 \longrightarrow 12 \longrightarrow 11 \longrightarrow 7,$$
$$(\boldsymbol{T}_{13}^{(II)})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5,\ 7 \longrightarrow 11 \longrightarrow 12 \longrightarrow 7 = \boldsymbol{T}_{96}^{(II)},$$
$$(\boldsymbol{T}_{13}^{(II)})^3 = \ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.$$

4) $\boldsymbol{T}_{21}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 13 \longrightarrow 11 \longrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5,\ 7 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9 \longrightarrow 7;$
$\boldsymbol{U}_{21}^{(II)} : (\boldsymbol{T}_{21}^{(II)})^2 = (\boldsymbol{T}_{21}^{(II)})^{-1} = \boldsymbol{T}_{168}^{(II)}.$

5) $\boldsymbol{T}_{23}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3,\ 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 9 \longrightarrow 6,\ 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 13 \longrightarrow 8;$
$\boldsymbol{U}_{23}^{(II)} : (\boldsymbol{T}_{23}^{(II)})^2 = (\boldsymbol{T}_{23}^{(II)})^{-1} = \boldsymbol{T}_{141}^{(II)}.$

6) $T_{24}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3, 5 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 5, 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7;$
$U_{24}^{(II)} : (T_{24}^{(II)})^2 = (T_{24}^{(II)})^{-1} = T_{143}^{(II)}.$

7) $T_{25}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3, 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5, 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8;$
$U_{25}^{(II)} : (T_{25}^{(II)})^2 = (T_{25}^{(II)})^{-1} = T_{140}^{(II)}.$

8) $T_{26}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 3, 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 9 \longrightarrow 5, 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 13 \longrightarrow 6;$
$U_{26}^{(II)} : (T_{26}^{(II)})^2 = (T_{26}^{(II)})^{-1} = T_{141}^{(II)}.$

9) $T_{27}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3, 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5, 6 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6;$
$U_{27}^{(II)} : (T_{27}^{(II)})^2 = (T_{27}^{(II)})^{-1} = T_{142}^{(II)}.$

10) $T_{28}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 12 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3, 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 6, 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7;$
$U_{28}^{(II)} : (T_{28}^{(II)})^2 = (T_{28}^{(II)})^{-1} = T_{139}^{(II)}.$

11) $T_{31}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3, 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6, 7 \longrightarrow 12 \longrightarrow 11 \longrightarrow 7;$
$U_{31}^{(II)} : (T_{31}^{(II)})^2 = (T_{31}^{(II)})^{-1} = T_{201}^{(II)}.$

12) $T_{38}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 9 \longrightarrow 13 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4, 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8;$
$U_{38}^{(II)} : (T_{38}^{(II)})^2 = (T_{38}^{(II)})^{-1} = T_{188}^{(II)}.$

13) $T_{39}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 4, 7 \longrightarrow 11 \longrightarrow 12 \longrightarrow 7;$
$U_{39}^{(II)} : (T_{39}^{(II)})^2 = (T_{39}^{(II)})^{-1} = T_{124}^{(II)}.$

14) $T_{50}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 13 \longrightarrow 9 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 11 \longrightarrow 4, 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8;$
$U_{50}^{(II)} : (T_{50}^{(II)})^2 = (T_{50}^{(II)})^{-1} = T_{90}^{(II)}.$

15) $T_{56}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3, 7 \longrightarrow 11 \longrightarrow 12 \longrightarrow 7, 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 8;$
$U_{56}^{(II)} : (T_{56}^{(II)})^2 = (T_{56}^{(II)})^{-1} = T_{193}^{(II)}.$

16) $T_{61}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 11 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 9 \longrightarrow 13 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 4, 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5;$
$U_{61}^{(II)} : (T_{61}^{(II)})^2 = (T_{61}^{(II)})^{-1} = T_{166}^{(II)}.$

17) $T_{72}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 13 \longrightarrow 9 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4, 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5;$
$U_{72}^{(II)} : (T_{72}^{(II)})^2 = (T_{72}^{(II)})^{-1} = T_{185}^{(II)}.$

18) $T_{91}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4, 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5;$
$U_{91}^{(II)} : (T_{91}^{(II)})^2 = (T_{91}^{(II)})^{-1} = T_{207}^{(II)}.$

19) $T_{94}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 13 \longrightarrow 9 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4, 6 \longrightarrow 10 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6;$
$U_{94}^{(II)} : (T_{94}^{(II)})^2 = (T_{94}^{(II)})^{-1} = T_{101}^{(II)}.$

20) $T_{107}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 13 \longrightarrow 4, 7 \longrightarrow 12 \longrightarrow 11 \longrightarrow 7;$
$U_{107}^{(II)} : (T_{107}^{(II)})^2 = (T_{107}^{(II)})^{-1} = T_{121}^{(II)}.$

21) $T_{116}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 13 \longrightarrow 9 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 12 \longrightarrow 4, 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 10 \longrightarrow 6;$
$U_{116}^{(II)} : (T_{116}^{(II)})^2 = (T_{116}^{(II)})^{-1} = T_{162}^{(II)}.$

22) $T_{128}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3, 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5, 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 10;$
$U_{128}^{(II)} : (T_{128}^{(II)})^2 = (T_{128}^{(II)})^{-1} = T_{148}^{(II)}.$

23) $T_{135}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3, 5 \longrightarrow 8 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5, 7 \longrightarrow 10 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7;$
$U_{135}^{(II)} : (T_{135}^{(II)})^2 = (T_{135}^{(II)})^{-1} = T_{170}^{(II)}.$

24) $T_{164}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longrightarrow 11 \longrightarrow 13 \longrightarrow 2, 3 \longrightarrow 10 \longrightarrow 12 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4, 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5;$
$U_{164}^{(II)} : (T_{164}^{(II)})^2 = (T_{164}^{(II)})^{-1} = T_{209}^{(II)}.$

43. Zur Vollständigkeit der Kenntnis der einfixpunktigen Inzidenzabbildungen $T_{,}^{(II)}$ in $S(13/2/4)$ beweisen wir jetzt den folgenden, *für die Axiomatik der ebenen* (reellen und komplexen) *projektiven Geometrie grundlegenden Satz*, der wieder deutlich den Unterschied zwischen endlicher und gewöhnlicher projektiver Geometrie erkennen läßt:

Satz 26. *Jede einfixpunktige Inzidenzabbildung* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{II})}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots, 210$) *der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *besitzt auch genau eine Fixgerade. Nach ihrem gruppentheoretischen Charakter aber zerfallen die* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{II})}$ *von* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *in genau zwei verschiedene Untertypen* $\boldsymbol{T}_{\nu_1}^{(\mathrm{II})_1}$ *und* $\boldsymbol{T}_{\nu_2}^{(\mathrm{II})_2}$, *je nachdem die Fixgerade den Fixpunkt enthält oder nicht enthält. Es gilt dabei:*

a) *Jede* $\boldsymbol{T}_{\nu_1}^{(\mathrm{II})}$, *die einer zyklischen Gruppe der Ordnung* 3 *als Element angehört, ist eine* $\boldsymbol{T}_{\nu_1}^{(\mathrm{II})_1}$;

b) *jede* $\boldsymbol{T}_{\nu_2}^{(\mathrm{II})}$, *die einer zyklischen Gruppe der Ordnung* 8 *oder* 4 *als Element angehört, ist eine* $\boldsymbol{T}_{\nu_2}^{(\mathrm{II})_2}$.

Beweis. Es genügt, den Beweis für die Elemente einer der Gruppen der Ordnungen 3, bzw. 8 und 4 durchzuführen, da sich die Elemente einer jeden Gruppe gleichberechtigt verhalten (s. unter C), A) und B) des Beweisgangs von Satz 25).

a) Als zyklische Gruppe der Ordnung 3 wählen wir die Gruppe $\boldsymbol{U}_7^{(\mathrm{II})}$ mit den Elementen $\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})}$, $\boldsymbol{T}_{51}^{(\mathrm{II})}$.

1) Vermöge $\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})}$ gehen die Geraden von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ folgendermaßen ineinander über (s. Tafel, Abb. 1):

$$\begin{aligned}
(1) = (1, 2, 4, 10) &\longrightarrow (1, 3, 9, 13) = (13)\\
(2) = (2, 3, 5, 11) &\longrightarrow (3, 6, 4, 12) = (3)\\
(3) = (3, 4, 6, 12) &\longrightarrow (6, 9, 2, 7) = (6)\\
(4) = (4, 5, 7, 13) &\longrightarrow (9, 4, 11, 8) = (8)\\
(5) = (1, 5, 6, 8) &\longrightarrow (1, 4, 2, 10) = (1)\\
(6) = (2, 6, 7, 9) &\longrightarrow (3, 2, 11, 5) = (2)\\
(7) = (3, 7, 8, 10) &\longrightarrow (6, 11, 10, 13) = (10)\\
(8) = (4, 8, 9, 11) &\longrightarrow (9, 10, 5, 12) = (9)\\
(9) = (5, 9, 10, 12) &\longrightarrow (4, 5, 13, 7) = (4)\\
(10) = (6, 10, 11, 13) &\longrightarrow (2, 13, 12, 8) = (12)\\
(11) = (1, 7, 11, 12) &\longleftrightarrow (1, 11, 12, 7) = (11)\\
(12) = (2, 8, 12, 13) &\longrightarrow (3, 10, 7, 8) = (7)\\
(13) = (1, 3, 9, 13) &\longrightarrow (1, 6, 5, 8) = (5),
\end{aligned}$$

also:

$$(1)\longrightarrow(13)\longrightarrow(5)\longrightarrow(1),(2)\longrightarrow(3)\longrightarrow(6)\longrightarrow(2),(4)\longrightarrow(8)\longrightarrow(9)\longrightarrow(4),(7)\longrightarrow(10)\longrightarrow(12)\longrightarrow(7),(11)\longleftrightarrow(11).$$

Da die Fixgerade (11) den Fixpunkt 1 enthält, so gilt: $\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})_1}$.

2) Wegen $\boldsymbol{T}_{51}^{(\mathrm{II})} = (\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})})^{-1}$ muß dieselbe Fixgerade (nämlich (11)), wie bei $\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})}$ erscheinen, so daß wieder gilt: $\boldsymbol{T}_{51}^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_{51}^{(\mathrm{II})_1}$ (s. auch Satz 1, Nr. **6**).

b) Als zyklische Gruppe der Ordnung 8 wählen wir die Gruppe $\boldsymbol{U}_5^{(\mathrm{II})}$ mit den Elementen $\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})}$, $\boldsymbol{T}_{44}^{(\mathrm{II})}$, $\boldsymbol{T}_{145}^{(\mathrm{II})}$, $\boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{II})}$, $\boldsymbol{T}_{42}^{(\mathrm{II})}$, $\boldsymbol{T}_{146}^{(\mathrm{II})}$. Da jede dieser Abbildungen, wie man aus ihrer Definition unmittelbar erkennt, die Gerade (2) von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ fest läßt — und nur diese — und diese Fixgerade den Fixpunkt 1 nicht enthält, so genügt es, die Beweisführung für eine derselben durchzuführen. Wir wählen etwa $\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})}$.

Vermöge $\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})}$ gehen die Geraden von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ wie folgt ineinander über:

$$\begin{aligned}
(1) = (1, 2, 4, 10) &\longrightarrow (1, 3, 13, 9) = (13)\\
(2) = (2, 3, 5, 11) &\longleftrightarrow (3, 5, 11, 2) = (2)\\
(3) = (3, 4, 6, 12) &\longrightarrow (5, 13, 7, 4) = (4)\\
(4) = (4, 5, 7, 13) &\longrightarrow (13, 11, 10, 6) = (10)\\
(5) = (1, 5, 6, 8) &\longrightarrow (1, 11, 7, 12) = (11)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(6) &= (2, 6, 7, 9) &&\longrightarrow (3, 7, 10, 8) &&= (7)\\
(7) &= (3, 7, 8, 10) &&\longrightarrow (5, 10, 12, 9) &&= (9)\\
(8) &= (4, 8, 9, 11) &&\longrightarrow (13, 12, 8, 2) &&= (12)\\
(9) &= (5, 9, 10, 12) &&\longrightarrow (11, 8, 9, 4) &&= (8)\\
(10) &= (6, 10, 11, 13) &&\longrightarrow (7, 9, 2, 6) &&= (6)\\
(11) &= (1, 7, 11, 12) &&\longrightarrow (1, 10, 2, 4) &&= (1)\\
(12) &= (2, 8, 12, 13) &&\longrightarrow (3, 12, 4, 6) &&= (3)\\
(13) &= (1, 3, 9, 13) &&\longrightarrow (1, 5, 8, 6) &&= (5),
\end{aligned}
$$

also:

$$(1) \longrightarrow (13) \longrightarrow (5) \longrightarrow (11) \longrightarrow (1),\ (2) \longleftrightarrow (2),\ (3) \longrightarrow (4) \longrightarrow (10) \longrightarrow (6) \longrightarrow (7) \longrightarrow (9) \longrightarrow (8) \longrightarrow 12) \longrightarrow (3).$$

Da die Fixgerade (2) den Fixpunkt 1 nicht enthält, gilt: $\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})_2}$.

Was schließlich die Abbildungen $\boldsymbol{T}_\varkappa^{(\mathrm{II})}$ anlangt, die einer Gruppe $\boldsymbol{V}_\varkappa^{(\mathrm{II})}$ der Ordnung 4 angehören, so folgt, daß diese $\boldsymbol{T}_\varkappa^{(\mathrm{II})}$ wieder $\boldsymbol{T}_\varkappa^{(\mathrm{II})_2}$ sind, daraus, daß $\boldsymbol{V}_\varkappa^{(\mathrm{II})}$ eine Untergruppe einer der Gruppen $\boldsymbol{U}_\nu^{(\mathrm{II})}$ der Ordnung 8 ist.

Die charakteristische Inzidenzkonstellation der Fixelemente des Untertyps $\boldsymbol{T}_{\nu_1}^{(\mathrm{II})_1}$ ($\nu_1 = 7, 51$; 12, 74; 13, 96; 21, 168; 23, 141; 24, 143; 25, 140; 26, 144; 27, 142; 28, 139; 31, 201; 38, 188; 39, 124; 50, 90; 56, 193; 61, 166; 72, 185; 91, 207; 94, 104; 107, 121; 116, 162; 128, 148; 135, 170; 164, 209) ist also die der Abb. 3; die entsprechende kennzeichnende Inzidenzkonstellation des Untertyps $\boldsymbol{T}_{\nu_2}^{(\mathrm{II})_2}$ ($\nu_2 = 5, 44, 145,\ 6, 42, 146$; 8, 59, 93, 195, 46, 167; 9, 66, 149, 200, 100,73; 10, 79, 40, 210, 180, 53; 11, 85, 55, 205, 159, 95; 14, 115, 172, 123, 37, 75; 15, 108, 163, 125, 70, 169; 18, 151, 30, 19, 153, 29; 20, 181, 106, 136, 157, 52; 22, 176, 32, 129, 89, 97; 33, 82, 138, 99, 155, 208; 35, 189, 173, 71, 17, 84; 36, 204, 158, 60, 133, 182; 41, 183, 198, 63, 161, 127; 43, 2, 150, 45, 1, 152; 47, 120, 156, 112, 192, 83; 49, 117, 81, 103, 4, 184; 54, 80, 137, 62, 88, 134; 57, 3, 87, 111, 190, 154; 65, 16, 160, 114, 118, 177; 67, 132, 78, 69, 119, 86; 76, 113, 126, 147, 48, 197; 77, 64, 122, 92, 68, 130; 98, 174, 206, 105, 178, 199; 102, 191, 179, 109, 203, 175; 131, 34, 165, 202, 58, 187; 171, 110, 196, 186, 101, 194) ist die der Abb. 4.

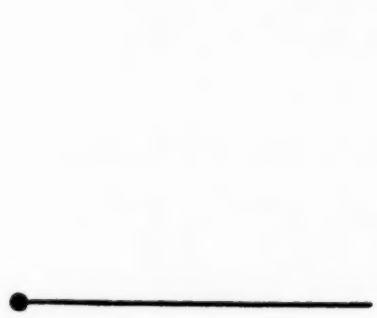

Abb. 3.

Abb. 4.

Für den Untertyp $\boldsymbol{T}_{\nu_2}^{(\mathrm{II})_2}$ gilt in sinngemäßer Erweiterung auf $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ das bereits unter Nr. **21** Gesagte, woraus wieder die *geometrisch-axiomatische Tragweite* der eben durchgeführten Untersuchungen erhellt.

§ 8. *Der zweifixpunktige Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{III})}$ *in* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$.

44. Als die zwei verschiedenen Fixpunkte mögen etwa die Punkte 1 und 2 von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ vorgeschrieben werden. Dann wird die zweifixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ auf sich mit Hilfe eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, 2, k', l'\}$ vorgenommen, in dem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangsnetzes der Reihe nach die Punkte 1, 2, k', l' als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ zugewiesen werden. Dabei sind überdies noch folgende Forderungen zu erfüllen:

1) $k' \neq 3, l' \neq 6$;
2) $\{1, 2, k'\}$, $\{2, k', l'\}$, $\{k', l', 1\}$, $\{l', 1, 2\}$ sämtlich nicht kollinear;
3) $m_1' \neq 4$, $m_2' \neq 5$, $m_3' \neq 9$;
4) $m_4' \neq 8$; $m_5' \neq 11$; 5) $m_6' \neq 10$, $m_7' \neq 12$;
6) $m_8' \neq 7$, $m_9' \neq 13$.

Dann behaupten wir den folgenden allgemeinen Existenzsatz:

Satz 27. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *gibt es bei vorgeschriebenen Fixpunkten genau* 12 *untereinander und von der Identität verschiedene zweifixpunktige Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{III})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 12)$, *die explizit angebbar sind.*

→ (3).

Beweis. Durch systematisches Erfüllen der obigen Forderungen 1)—6) erkennt man wieder, daß als Bildvierecke $\{1, 2, k', l'\}$ zu $\{1, 2, 3, 6\}$ *genau* die folgenden zwölf Vierecke in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ eintreten können:

1. $\{1, 2, 5, 12\}$	4. $\{1, 2, 7, 3\}$	7. $\{1, 2, 8, 7\}$	10. $\{1, 2, 12, 5\}$
2. $\{1, 2, 6, 11\}$	5. $\{1, 2, 7, 8\}$	8. $\{1, 2, 9, 12\}$	11. $\{1, 2, 12, 9\}$
3. $\{1, 2, 6, 13\}$	6. $\{1, 2, 8, 3\}$	9. $\{1, 2, 11, 13\}$	12. $\{1, 2, 13, 11\}$.

Die entsprechenden (mit gleichem Index wie diese Nummern versehenen), hierdurch erzeugten zweifixpunktigen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{III})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 12)$ ergeben sich dann wieder am einfachsten und systematisch durch Betrachtung *ihrer zyklischen Gruppen der Ordnung* 6. Dies möge jetzt nachgewiesen werden.

1) $\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{III})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_1^{(\mathrm{III})}$:

$$\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{III})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3,\ 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7 \longrightarrow 13 \longrightarrow 6,$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{III})})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6,\ 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8,\ 10 \longleftrightarrow 10,$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{III})})^3 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 3,\ 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4,\ 5 \longleftrightarrow 5,\ 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 6,\ 7 \longrightarrow 12 \longrightarrow 7,\ 9 \longrightarrow 13 \longrightarrow 9,\ 11 \longleftrightarrow 11,$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{III})})^4 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 6,\ 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 8,\ 10 \longleftrightarrow 10,$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{III})})^5 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3,\ 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 13 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 6 = \boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{III})},$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{III})})^6 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, 13 \longleftrightarrow 13 = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

2) $\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{III})}$ erzeugt die zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_2^{(\mathrm{III})}$:

$$\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{III})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 11 \longrightarrow 9 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3,\ 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4,\ 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 8,$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{III})})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6,\ 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8,\ 10 \longleftrightarrow 10,$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{III})})^3 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 9 \longrightarrow 3,\ 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5,\ 7 \longrightarrow 11 \longrightarrow 7,\ 8 \longleftrightarrow 8,\ 12 \longleftrightarrow 12,\ 13 \longleftrightarrow 13,$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{III})})^4 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 6,\ 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 8,\ 10 \longleftrightarrow 10,$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{III})})^5 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 11 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3,\ 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4,\ 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8 = \boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{III})},$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{III})})^6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

3) $\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{III})} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longleftrightarrow 2, 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 13 \longrightarrow 5 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4, 7 \longrightarrow 12 \longrightarrow 11 \longrightarrow 7,$

$$\boldsymbol{U}_3^{(\mathrm{III})} : (\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{III})})^5 = (\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{III})})^{-1} = \boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{III})}.$$

4) $\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{III})} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longleftrightarrow 2, 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 13 \longrightarrow 11 \longrightarrow 9 \longrightarrow 12 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4, 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 5,$

$$\boldsymbol{U}_5^{(\mathrm{III})} : (\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{III})})^5 = (\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{III})})^{-1} = \boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{III})}.$$

5) $\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{III})} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longleftrightarrow 2, 3 \longrightarrow 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 13 \longrightarrow 5 \longrightarrow 12 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4, 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 6,$

$$\boldsymbol{U}_7^{(\mathrm{III})} : (\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{III})})^5 = (\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{III})})^{-1} = \boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{III})}.$$

6) $\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{III})} = 1 \longleftrightarrow 1, 2 \longleftrightarrow 2, 3 \longrightarrow 9 \longrightarrow 13 \longrightarrow 3, 4 \longrightarrow 10 \longrightarrow 4, 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 11 \longrightarrow 6 \longrightarrow 12 \longrightarrow 5,$

$$\boldsymbol{U}_8^{(\mathrm{III})} : (\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{III})})^5 = (\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{III})})^{-1} = \boldsymbol{T}_{12}^{(\mathrm{III})}.$$

45. An diese Beweisführung anschließend haben wir jetzt den folgenden Satz nachzuweisen:

Satz 28. *Jede zweifixpunktige Inzidenzabbildung* $\boldsymbol{T}_{\nu}^{(III)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 12)$ *der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *besitzt auch genau zwei Fixgeraden.*

Beweis. Es genügt wieder, den Nachweis dieses Satzes für die Elemente einer der Gruppen $\boldsymbol{U}^{(III)}$ durchzuführen. Als Gruppe wählen wir die $\boldsymbol{U}_1^{(III)}$ mit den Elementen $\boldsymbol{T}_1^{(III)}$ und $\boldsymbol{T}_9^{(III)}$.

Dann gehen vermöge $\boldsymbol{T}_1^{(III)}$ die Geraden von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ folgendermaßen ineinander über:

$$\begin{aligned}
(1) = (1, 2, 4, 10) &\longleftrightarrow (1, 2, 10, 4) = (1)\\
(2) = (2, 3, 5, 11) &\longleftrightarrow (2, 5, 11, 3) = (2)\\
(3) = (3, 4, 6, 12) &\longrightarrow (5, 10, 12, 9) = (9)\\
(4) = (4, 5, 7, 13) &\longrightarrow (10, 11, 13, 6) = (10)\\
(5) = (1, 5, 6, 8) &\longrightarrow (1, 11, 12, 7) = (11)\\
(6) = (2, 6, 7, 9) &\longrightarrow (2, 12, 13, 8) = (12)\\
(7) = (3, 7, 8, 10) &\longrightarrow (5, 13, 7, 4) = (4)\\
(8) = (4, 8, 9, 11) &\longrightarrow (10, 7, 8, 3) = (7)\\
(9) = (5, 9, 10, 12) &\longrightarrow (11, 8, 4, 9) = (8)\\
(10) = (6, 10, 11, 13) &\longrightarrow (12, 4, 3, 6) = (3)\\
(11) = (1, 7, 11, 12) &\longrightarrow (1, 13, 3, 9) = (13)\\
(12) = (2, 8, 12, 13) &\longrightarrow (2, 7, 9, 6) = (6)\\
(13) = (1, 3, 9, 13) &\longrightarrow (1, 5, 8, 6) = (5),
\end{aligned}$$

also:

$$(1)\longleftrightarrow(1), (2)\longleftrightarrow(2), (3)\longrightarrow(9)\longrightarrow(8)\longrightarrow(7)\longrightarrow(4)\longrightarrow(10)\longrightarrow(3), (5)\longrightarrow(11)\longrightarrow(13)\longrightarrow(5), (6)\longrightarrow(12)\longrightarrow(6).$$

Da $\boldsymbol{T}_9^{(III)} = (\boldsymbol{T}_1^{(III)})^{-1}$ ist, so besitzt es dieselben Fixgeraden (1) und (2), wie $\boldsymbol{T}_1^{(III)}$.

Die charakteristische Inzidenzkonstellation der Fixelemente des zweifixpunktigen Inzidenzabbildungstyps $\boldsymbol{T}_{\nu}^{(III)}$ ist also die der Abb. 5. — Dieser Inzidenzabbildungstyp $\boldsymbol{T}^{(III)}$ hat im Baldusschen ebenen Kollineationstyp (IV) sein Analogon.

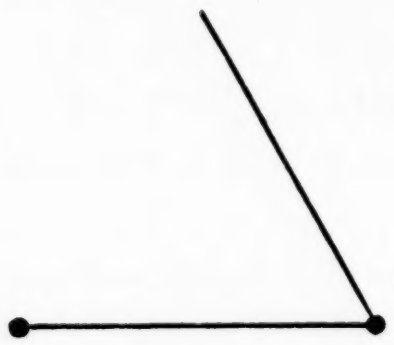

Abb. 5.

§ 9. *Der n-fixpunktige kollineare Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(IV)}$ *in* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$.

46. Da $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 4$ eintritt, haben wir hier vom *vierfixpunktigen kollinearen Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(IV)}$ zu sprechen. Als die vier verschiedenen, kollinearen Fixpunkte mögen etwa die Punkte 1, 2, 4, 10, die kollinear auf (1) liegen, vorgeschrieben werden. Dann wird die vierfixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ auf sich mit Hilfe eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, 2, k', l'\}$ vorgenommen, in dem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangs-

netzes der Reihe nach die Punkte $1, 2, k', l'$ als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ zugewiesen werden. Dabei muß des weiteren noch den folgenden Forderungen Genüge geleistet werden:

1) $k' \neq 3$, $l' \neq 6$;

2) $\{1, 2, k'\}$, $\{2, k', l'\}$, $\{k', l', 1\}$, $\{l', 1, 2\}$ sämtlich nicht kollinear;

3) Da 4 jetzt noch als Fixpunkt vorgeschrieben ist, reduzieren sich die Forderungen 3) des § 8 hier auf: $m_2' \neq 5$, $m_3' \neq 9$.

4) $m_4' \neq 8$, $m_5' \neq 11$.

5) Da außerdem jetzt noch 10 als Fixpunkt vorgeschrieben ist, reduzieren sich die beiden Forderungen 5) des § 8 hier auf: $m_7' \neq 12$.

6) $m_8' \neq 7$, $m_9' \neq 13$.

Wir behaupten jetzt den folgenden Existenzsatz:

Satz 29. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *gibt es bei vorgeschriebenen kollinearen Fixpunkten genau* 8 *untereinander und von der Identität verschiedene vierfixpunktige kollineare Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{IV})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 8)$.

Beweis. Eine systematische Erfüllung der Forderungen 1)—6), die berücksichtigt, daß $(1) = (1, 2, 4, 10)$ die identisch auf sich bezogene Gerade sein soll, liefert zu $\{1, 2, 3, 6\}$ als Ausgangsviereck *genau* die folgenden acht Bildvierecke $\{1, 2, k', l'\}$ des Möbiusschen Bildnetzes:

1. $\{1, 2, 5, 7\}$	3. $\{1, 2, 7, 13\}$	5. $\{1, 2, 9, 8\}$	7. $\{1, 2, 12, 3\}$
2. $\{1, 2, 6, 12\}$	4. $\{1, 2, 8, 11\}$	6. $\{1, 2, 11, 9\}$	8. $\{1, 2, 13, 5\}$.

Die entsprechenden (mit gleichen Indizes wie diese Nummern versehenen), hierdurch erzeugten vierfixpunktigen kollinearen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{IV})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 8)$ erhält man wieder am einfachsten durch Betrachtung *ihrer zyklischen Gruppen der Ordnung* 3.

1) $\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{IV})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe $\boldsymbol{U}_1^{(\mathrm{IV})}$:

$$\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{IV})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 11 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 9 \longrightarrow 6,\ 8 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13 \longrightarrow 8,\ 10 \longleftrightarrow 10,$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{IV})})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 11 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6,\ 8 \longrightarrow 13 \longrightarrow 12 \longrightarrow 8,\ 10 \longleftrightarrow 10 = \boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{IV})},$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{IV})})^3 = \ldots\ldots\ldots\

Beweis. Der Einfachheit halber und weil dies, wie man sich leicht überlegt, bereits genügt, führen wir den Nachweis nur mehr wieder für eine der $T_\nu^{(IV)}$ und wählen etwa $T_1^{(IV)}$.

Dann gehen vermöge $T_1^{(IV)}$ die Geraden von $S(13/2/4)$ folgendermaßen ineinander über:

$$\begin{aligned}
(1) = (1, 2, 4, 10) &\longleftrightarrow (1, 2, 4, 10) = (1)\\
(2) = (2, 3, 5, 11) &\longleftrightarrow (2, 5, 11, 3) = (2)\\
(3) = (3, 4, 6, 12) &\longrightarrow (5, 4, 7, 13) = (4)\\
(4) = (4, 5, 7, 13) &\longrightarrow (4, 11, 9, 8) = (8)\\
(5) = (1, 5, 6, 8) &\longrightarrow (1, 11, 7, 12) = (11)\\
(6) = (2, 6, 7, 9) &\longleftrightarrow (2, 7, 9, 6) = (6)\\
(7) = (3, 7, 8, 10) &\longrightarrow (5, 9, 12, 10) = (9)\\
(8) = (4, 8, 9, 11) &\longrightarrow (4, 12, 6, 3) = (3)\\
(9) = (5, 9, 10, 12) &\longrightarrow (11, 6, 10, 13) = (10)\\
(10) = (6, 10, 11, 13) &\longrightarrow (7, 10, 3, 8) = (7)\\
(11) = (1, 7, 11, 12) &\longrightarrow (1, 9, 3, 13) = (13)\\
(12) = (2, 8, 12, 13) &\longleftrightarrow (2, 12, 13, 8) = (12)\\
(13) = (1, 3, 9, 13) &\longrightarrow (1, 5, 6, 8) = (5),
\end{aligned}$$

also:

$$(1)\longleftrightarrow(1),\ (2)\longleftrightarrow(2),\ (3)\longrightarrow(4)\longrightarrow(8)\longrightarrow(3),\ (5)\longrightarrow(11)\longrightarrow(13)\longrightarrow(5),\ (6)\longleftrightarrow(6),$$
$$(7)\longrightarrow(9)\longrightarrow(10)\longrightarrow(7),\ (12)\longleftrightarrow(12),$$

und alle vier Fixgeraden haben den Fixpunkt 2 gemeinsam.

Die charakteristische Inzidenzkonstellation der Fixelemente des vierfixpunktigen Inzidenzabbildungstyps $T_\nu^{(IV)}$ ist also die der Abb. 6. — Dieser Inzidenzabbildungstypus hat im Baldusschen ebenen Kollineationstyp (V), der zentralen Kollineation mit dem Kollineationszentrum auf der Kollineationsachse, sein Analogon.

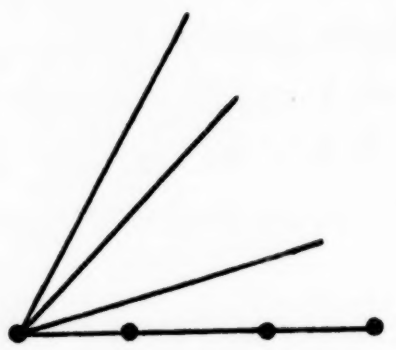

Abb. 6.

§ 10. *Die Nichtexistenz des dreifixpunktigen Inzidenzabbildungstyps* $T^{(V)}$ *in* $S(13/2/4)$.

48. Als Fixpunktdreieck mag etwa das Dreieck der Punkte 1, 2, 3 vorgeschrieben werden. Dann wird die dreifixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $S(13/2/4)$ auf sich mittels eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, 2, 3, l'\}$ vorgenommen, indem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangsnetzes der Reihe nach die Punkte 1, 2, 3, l' als Bildpunkte aus $S(13/2/4)$ zugewiesen werden. Dabei müssen überdies noch die folgenden Forderungen erfüllt werden:

1) $l' \neq 6$;
2) $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, l'\}$, $\{3, l', 1\}$, $\{l', 1, 2\}$ sämtlich nicht kollinear;
3) $m_1' \neq 4$, $m_2' \neq 5$, $m_3' \neq 9$;
4) $m_4' \neq 8$, $m_5' \neq 11$;
5) $m_6' \neq 10$, $m_7' \neq 12$;
6) $m_8' \neq 7$, $m_9' \neq 13$.

Wir behaupten jetzt den

Satz 31. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *gibt es den reellen ebenen Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(V)}$ *mit genau drei nichtkollinearen Fixpunkten* (dreifixpunktige Inzidenzabbildung) *nicht.*

Beweis. Der Beweis für die Nichtexistenz von $\boldsymbol{T}^{(V)}$ in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ verläuft in folgenden, auch für spätere Überlegungen (s. Nr. **49, 51**) wichtigen Schritten:

1) Die Erfüllung der obigen Forderung 1) liefert zu $\{1, 2, 3, 6\}$ in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *genau* die folgenden drei Bildvierecke:

1. $\{1, 2, 3, 7\}$
2. $\{1, 2, 3, 8\}$
3. $\{1, 2, 3, 12\}$.

2) Für jedes dieser drei Vierecke sind die obigen Forderungen 2) einzeln erfüllt, denn:

a) $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 7\}$, $\{3, 7, 1\}$, $\{7, 1, 2\}$ liegen sämtlich nicht kollinear, wie die Kolonnen (1), (2), (7), (11) der Tafel (Abb. 1) zeigen.

b) $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 8\}$, $\{3, 8, 1\}$, $\{8, 1, 2\}$ liegen sämtlich nicht kollinear, wie die Kolonnen (1), (2), (7), (5) zeigen.

c) $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 12\}$, $\{3, 12, 1\}$, $\{12, 1, 2\}$ liegen sämtlich nicht kollinear, wie die Kolonnen (1), (2), (3), (11) zeigen.

3) Dagegen ist

a) für das erste der drei Vierecke die dritte der Forderungen 3) und die letzte Forderung aus 6) nicht erfüllt (und auch nicht erfüllbar), denn:

$$(1, 3) \times (2, 7) = 9, \quad \{(13) \times (6)\},$$
$$(1, 3) \times (10, 11) = 13, \quad \{(13) \times (10)\},$$

d. h. die mit 1 und 3 auf (13) kollinearen Punkte 9 und 13 treten noch als Fixpunkte auf;

b) für das zweite der drei Vierecke die zweite der Forderungen 3) und die zweite der Forderungen 4) nicht erfüllt, denn:

$$(1, 8) \times (2, 3) = 5, \quad \{(5) \times (2)\},$$
$$(10, 13) \times (2, 3) = 11, \quad \{(10) \times (2)\},$$

d. h. die mit 2 und 3 auf (2) kollinearen Punkte 5 und 11 treten noch als Fixpunkte auf;

c) für das dritte der drei Vierecke endlich die erste der Forderungen 3) und die erste der Forderungen 5) nicht erfüllt, denn:

$$(1, 2) \times (3, 12) = 4, \quad \{(1) \times (3)\},$$
$$(1, 2) \times (11, 13) = 10, \quad \{(1) \times (10)\},$$

d. h. die mit 1 und 2 auf (1) kollinearen Punkte 4 und 10 treten noch als Fixpunkte auf.

§ 11. *Der* $(n + 1)$*-fixpunktige kollineare Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ *in* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$.

49. Da $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 4$ eintritt, so haben wir hier vom *fünffixpunktigen kollinearen Inzidenzabbildungstypus* $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ zu sprechen.

Dann gibt uns die Beweisführung des Satzes 31 bereits alle Mittel in die Hand, den gesuchten Inzidenzabbildungstyp $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ aufzufinden, wie die folgenden Entwicklungen zeigen werden.

Als identisch auf sich bezogene Gerade werde hier etwa die Gerade $(1) = (1, 2, 4, 10)$, als der mit ihr nicht inzidierende weitere Fixpunkt etwa der Punkt 3 vorgeschrieben.

Dann wird die fünffixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ auf sich mittels eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, 2, 3, l'\}$ vorgenommen, indem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangsnetzes der Reihe nach die Punkte $1, 2, 3, l'$ als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ zugewiesen werden. Dabei müssen überdies noch die folgenden Forderungen erfüllt werden:

1) $l' \neq 6$;

2) $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, l'\}$, $\{3, l', 1\}$, $\{l', 1, 2\}$ sämtlich nicht kollinear;

3) $m_2' \neq 5$, $m_3' \neq 9$; 4) $m_4' \neq 8$, $m_5' \neq 11$; 5) $m_7' \neq 12$; 6) $m_8' \neq 7$, $m_9' \neq 13$.

Jetzt behaupten wir den

Satz 32. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *gibt es bei vorgeschriebenem Fixpunktdreieck mit vorgeschriebener identisch auf sich bezogener Seite genau eine fünffixpunktige kollineare Inzidenzabbildung* $\boldsymbol{T}^{(VI)}$.

Beweis. Den Forderungen 1) und 2) leisten wieder (wie im Falle des Satzes 31) die drei Bildvierecke $\{1, 2, 3, 7\}$, $\{1, 2, 3, 8\}$, $\{1, 2, 3, 12\}$ Genüge. Dagegen zeigt die Beweisführung des Satzes 31 unter 3), a)—c), insb. unter 3), c), daß der Forderung des Identischaufsichbezogenseins der Seite $(1) = (1, 2, 4, 10)$ des Fixpunktsdreiecks $\{1, 2, 3\}$ nur durch das eine Bildviereck

$$\{1, 2, 3, 12\}$$

und damit auch den obigen Forderungen 3)—6) genügt wird. In der Tat liefert nun dieses Bildviereck die behauptete fünffixpunktige Inzidenzabbildung

$$\boldsymbol{T}^{(VI)} = 1\longleftrightarrow 1, 2\longleftrightarrow 2, 3\longleftrightarrow 3, 4\longleftrightarrow 4, 5\longrightarrow 11\longrightarrow 5, 6\longrightarrow 12\longrightarrow 6, 7\longrightarrow 8\longrightarrow 7, 9\longrightarrow 13\longrightarrow 9, 10\longleftrightarrow 10.$$

50. Im Anschluß hieran beweisen wir jetzt den

Satz 33. *Die fünffixpunktige kollineare Inzidenzabbildung* $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ *besitzt auch genau fünf Fixgeraden, von denen die vier nicht identisch auf sich bezogenen durch den nicht auf der identisch auf sich bezogenen Seite des Fixpunktsdreiecks liegenden (Fix-)Punkt gehen.*

Beweis. $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ bildet die Geraden von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}
(1) = (1, 2, 4, 10) &\longleftrightarrow (1, 2, 4, 10) = (1)\\
(2) = (2, 3, 5, 11) &\longleftrightarrow (2, 3, 11, 5) = (2)\\
(3) = (3, 4, 6, 12) &\longleftrightarrow (3, 4, 12, 6) = (3)\\
(4) = (4, 5, 7, 13) &\longrightarrow (4, 11, 8, 9) = (8)\\
(5) = (1, 5, 6, 8) &\longrightarrow (1, 11, 12, 7) = (11)\\
(6) = (2, 6, 7, 9) &\longrightarrow (2, 12, 8, 13) = (12)\\
(7) = (3, 7, 8, 10) &\longleftrightarrow (3, 8, 7, 10) = (7)\\
(8) = (4, 8, 9, 11) &\longrightarrow (4, 7, 13, 5) = (4)\\
(9) = (5, 9, 10, 12) &\longrightarrow (11, 13, 10, 6) = (10)\\
(10) = (6, 10, 11, 13) &\longrightarrow (12, 10, 5, 9) = (9)\\
(11) = (1, 7, 11, 12) &\longrightarrow (1, 8, 5, 6) = (5)\\
(12) = (2, 8, 12, 13) &\longrightarrow (2, 7, 6, 9) = (6)\\
(13) = (1, 3, 9, 13) &\longleftrightarrow (1, 3, 13, 9) = (13),
\end{aligned}$$

also:

$$(1)\longleftrightarrow(1),\ (2)\longleftrightarrow(2),\ (3)\longleftrightarrow(3),\ (4)\longrightarrow(8)\longrightarrow(4),\ (5)\longrightarrow(11)\longrightarrow(5),$$
$$(6)\longrightarrow(12)\longrightarrow(6),\ (7)\longleftrightarrow(7),\ (9)\longrightarrow(10)\longrightarrow(9),\ (13)\longleftrightarrow(13).$$

Die vier Fixgeraden (2), (3), (7) und (13), die nicht identisch auf sich bezogen sind, haben alle den Punkt 3 gemeinsam, der nicht auf der identisch auf sich bezogenen Geraden (1) liegt.

Die charakteristische Inzidenzkonstellation der Fixelemente der $\boldsymbol{T}^{(VI)}$, die — nebenbei bemerkt — *involutorisch* ist und daher *eine zyklische Gruppe der Ordnung* 2

erzeugt, ist also die der Abb. 7. — Dieser Inzidenzabbildungstypus hat im Baldusschen ebenen Kollineationstyp (II), der zentralen Kollineation mit nicht auf der Kollineationsachse gelegenem Kollineationszentrum, sein Analogon.

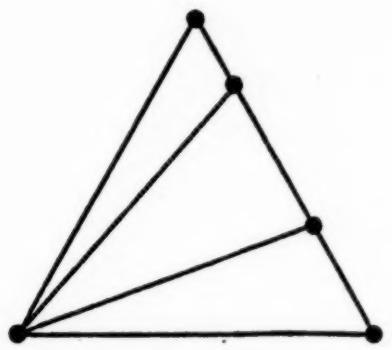

Abb. 7.

§ 12. *Der Vollständigkeitsnachweis: Die Gruppe* $\boldsymbol{G}_{5616}$ *der reellen Inzidenzabbildungen von* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$.

51. Der Vollständigkeitsbeweis für die Untersuchungen des 3. Kapitels dieser Arbeit ist dann erbracht, wenn gezeigt werden kann, daß alle in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ überhaupt möglichen reellen Inzidenzabbildungen durch unsere Typenbildung erfaßt sind. M. a. W. zum Nachweis der Vollständigkeit haben wir lediglich die Ordnung 5616 der Gruppe $\boldsymbol{G}_{5616}$ der reellen Inzidenzabbildungen der minimalen Viereckgeometrie $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ aufzuweisen. Dies geschieht folgendermaßen:

1) Durch Satz 23 ist die Existenz von *genau* 1728 untereinander und von der Identität verschiedenen fixpunktfreien Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}$ von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ durch ihre explizite geometrische Konstruktion nachgewiesen worden.
2) Der Satz 25 weist bei vorgeschriebenem Fixpunkt die Existenz von genau 210 einfixpunktigen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{II})}$ durch explizite geometrische Konstruktion nach. Da aber jeder der 13 Punkte von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ als Fixpunkt vorgeschrieben werden kann, *so gibt es in* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *insgesamt* $13 \cdot 210 = 2730$ *einfixpunktige Inzidenzabbildungstypen* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{II})}$, die ihrerseits in genau zwei Untertypen $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{II})_1}$ und $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{II})_2}$ zerfallen, wobei es *vom ersten Untertyp genau* $13 \cdot 48 = 624$, *vom zweiten Untertyp genau* $13 \cdot 162 = 2106$ *gibt* (s. Satz 26, Nr. **43**).
3) Durch Satz 27 ist bei vorgeschriebenen Fixpunkten die Existenz von genau 12 zweifixpunktigen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{III})}$ wieder durch geometrische Konstruktion nachgewiesen worden. Da es von den 13 verschiedenen Punkten von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *genau* 78 verschiedene Paare gibt, die als Fixpunktpaare vorgeschrieben werden können, *so gibt es in* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *insgesamt* $78 \cdot 12 = 936$ *zweifixpunktige Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{III})}$.
4) Der Satz 29 weist bei vorgeschriebenen kollinearen Fixpunkten die Existenz von genau 8 vierfixpunktigen kollinearen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{IV})}$ durch explizite geometrische Konstruktion nach. Da jede der 13 verschiedenen Geraden von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ als identisch auf sich bezogene Gerade vorgeschrieben werden kann, *so gibt es in* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *insgesamt* $13 \cdot 8 = 104$ *vierfixpunktige kollineare Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{IV})}$.
5) Weil durch Satz 31 auf geometrischem Wege erwiesen ist, daß es den Inzidenzabbildungstyp $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{V})}$ mit genau drei verschiedenen, nichtkollinearen Fixpunkten in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ nicht gibt, so kann jetzt zur Abzählung der Typen $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VI})}$ von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ bündig folgendermaßen geschlossen werden.

Da der Satz 32 beweist, daß es den Inzidenzabbildungstyp $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ gibt, und daß für ein festgehaltenes Fixpunktdreieck mit vorgeschriebener identisch auf sich bezogener Seite genau *eine* Abbildung $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ existiert, so kommt es jetzt nur mehr darauf an, sämtliche nichtkollinearen Punktetripel von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ abzählend anzugeben, die durch eine jede der 13 Geraden von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ (vorgeschriebene identisch auf sich bezogene Seite!) mit den nicht mit ihr inzidenten Punkten gebildet werden. Zu jeder der 13 Geraden von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ gibt es aber genau je 9 weitere Punkte, die mit ihr nicht inzidieren (nach Definition von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ durch die Tafel der Abb. 1). Mithin gibt es insgesamt $13 \cdot 9 = 117$ nichtkollineare Punktetripel, die als Fixpunktdreiecke mit vorgeschriebener identisch auf sich bezogener Seite für den Typ $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ eintreten können. *Daher gibt es insgesamt in* $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ *genau* 117 *fünffixpunktige Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}^{(VI)}$.

6) Schließlich gibt es (Satz 2, Nr. 7) noch die Identität $\boldsymbol{T}^{(VII)}$, das Einheitselement der $\boldsymbol{G}_{5616}$.

Aus 1)—6) aber ergibt sich durch Addition der Elementanzahlen

$$1728 + 2730 + 936 + 104 + 117 + 1 = 5616$$

die *Ordnung der Gruppe* $\boldsymbol{G}$ der reellen Inzidenzabbildungen von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$, womit der Vollständigkeitsbeweis erbracht ist.

52. In den Beweisführungen der Sätze 23, 25, 27, 29, 33 sind jeweils direkt die zyklischen Gruppen angegeben worden, die die einzelnen Inzidenzabbildungstypen bilden, wodurch wieder eine einfache *geometrische Deutung* (Darstellung) *der zyklischen Gruppen* geliefert wurde. *Diese zyklischen Gruppen*, über deren Ordnungen, Eigenschaften und Anzahlen in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ nach den Entwicklungen des 2. Kapitels und nach den oben durchgeführten Abzählungen kein Zweifel bestehen kann, *sind*, wie man unmittelbar aus den einschlägigen Beweisführungen der §§ 6—11 erkennt, *zyklische Untergruppen der* $\boldsymbol{G}_{5616}$.

Diese rein gruppentheoretischen Eigenschaften der $\boldsymbol{T}$ von $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ werden wir in einer folgenden Arbeit gesondert formulieren; die Ergebnisse selbst sind bereits in den Beweisführungen der Sätze 23, 25, 27, 29, 33 enthalten und bedürfen lediglich nochmals einer Zusammenstellung, die wir aus Raumgründen in dieser Arbeit unterdrücken. Des weiteren werden wir später zeigen, daß wir durch unsere Untersuchungen alle Mittel in der Hand haben, die Nachweise für die *Gleichberechtigung der Elemente eines jeden Veblensystems* und für seine *Einzigkeit* oder *Mehrfachheit* rein geometrisch zu erbringen.

Damit erhalten die vorliegenden geometrisch-axiomatischen Untersuchungen in der endlichen minimalen Viereckgeometrie $\boldsymbol{S}(13/2/4)$ auch ihre vollständige gruppentheoretische Abrundung und damit jene Bündigkeit der Begründung, die das Ziel geometrisch-axiomatischer Forschung ist. *Die endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme selbst erhalten hierdurch ihre Einordnung in den Ideenkreis des Kleinschen „Erlanger Programms“.*

Eingegangen 13. April 1938.